

طرح درس جامع دوره

«توپولوژی مقدماتی: از شهود تا اثبات کامل»

مجید کوکبی

۶ مهر ۱۴۰۵

شناسنامه دوره

دانشکده	علوم ریاضی	سال تحصیلی	۱۴۰۵-۱۴۰۶
نام درس	توپولوژی مقدماتی	تعداد واحد	۴
مقطع	کارشناسی	پیش نیاز	نظریه مجموعه‌ها، آنالیز حقیقی مقدماتی
تعداد ساعات تدریس در هفته	۴	نام مدرس	مجید کوکبی
شماره کلاس	۲۱۴	زمان کلاس	۱شنبه ۱۶-۱۸، ۳شنبه ۱۶-۱۸

جایگاه درس در برنامه درسی دوره

این درس یکی از دروس پایه و بنیادین در مقطع کارشناسی ریاضی است که دانشجو را با مفاهیم اساسی توپولوژی (فضاهای توپولوژیک، پیوستگی، همبندی، فشردگی، اصول جداسازی و ...) آشنا می‌کند. این درس پیش‌نیاز دوره‌های پیشرفته‌تری همچون توپولوژی جبری، هندسه دیفرانسیل، آنالیز تابعی و نظریه هم‌توپولوژی است و نقش کلیدی در آماده‌سازی دانشجو برای دروس تخصصی دیگر ایفا می‌کند.

هدف کلی

دانشجو باید بتواند مفاهیم بنیادی توپولوژی را درک کرده، قضایای اصلی را با اثبات کامل ارائه دهد، و توانایی تحلیل و حل مسائل توپولوژیک را در فضاهای متنوع (متناهی، متریک، حاصل ضرب، خارج قسمت و ...) کسب نماید. هدف نهایی، پرورش تفکر انتزاعی، دقت در استدلال ریاضی، و توانایی تعمیم مفاهیم از $\mathbb{R}$ به فضاهای توپولوژیک عمومی است.

اهداف یادگیری

تسلط نسبی دانشجو در مورد مباحث زیر و حل تمرین آن‌ها:

۱. تعریف توپولوژی با اصول موضوع مجموعه‌های باز و اثبات معادل آن با اصول موضوع مجموعه‌های بسته.

۲. تعریف عملگر بستار کوراتوفسکی و اثبات قضیه کوراتوفسکی.

۳. ساخت مثال‌های متنوع فضاهای توپولوژیک (گسسته، پادگسسته، هم‌متناهی، متریک، ترتیبی).
۴. محاسبه نقطه درونی، چسبیده، مرزی، بستار و زیرمجموعه چگال.
۵. ساخت پایه و زیرپایه توپولوژی و اثبات قضیه شرط پایه بودن.
۶. تشخیص فضاهای تفکیک‌پذیر، شمارای نوع اول و دوم، و اصول جداسازی T_0, T_1, T_2, T_3, T_4 .
۷. تعریف پیوستگی تابع در یک نقطه و پیوستگی سراسری و اثبات چهار معادل پیوستگی.
۸. تعریف نگاشت باز و نگاشت بسته و تشخیص تفاوت آن‌ها با پیوستگی.
۹. ساخت زیرفضا، فضای حاصل‌جمعی، حاصل‌ضربی و خارج‌قسمتی.
۱۰. تعریف نشاننده و همسان‌ریختی و ارائه مثال.
۱۱. تعریف همبندی، همبندی راهی و همبندی موضعی و تحلیل مؤلفه‌های آن‌ها.
۱۲. تعریف فشردگی و اثبات قضیه هاینه-بورل.
۱۳. اثبات فشردگی تصویر پیوسته و بسته بودن فشرده در هاسدرف.
۱۴. اثبات فشردگی حاصل‌ضرب متناهی (لم لوله).
۱۵. تعریف فضای منظم و نرمال و اثبات معادل‌های آن‌ها.
۱۶. اثبات لم اورینسن و بیان قضیه تیتز.
۱۷. تعریف تور و پالایه و تحلیل همگرایی آن‌ها.
۱۸. تعریف فراپالایه و اثبات لم فراپالایه.
۱۹. اثبات قضیه زیرپایه الکساندر و قضیه تیخونف.
۲۰. تعریف فضای متریک و توپولوژی متریک و تحلیل هم‌ارزی مترها.
۲۱. اثبات قضیه متریک‌پذیری اورایسون.
۲۲. ساخت خم فضا پرکن و تحلیل پوشا بودن آن.
۲۳. تعریف گروه توپولوژیک و ارائه مثال‌های متعدد.
۲۴. تحلیل زیرگروه، زیرگروه بسته و گروه خارج‌قسمتی.
۲۵. تعریف عمل گروه توپولوژیک و فضای همگن.
۲۶. بیان قضیه بیرکف و قضیه کاکوتائی.

رفتار ورودی

تسلط بر مباحث مقدماتی ریاضیات همچون:

- نظریه مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک، متمم، ضرب دکارتی، مجموعه توانی).
- آشنایی مقدماتی با $\mathbb{R}$ و بازه‌ها.
- منطق ریاضی مقدماتی (استدلال مستقیم، عکس نقیض، برهان خلف).
- مفاهیم پایه‌ای آنالیز حقیقی (حد، پیوستگی در $\mathbb{R}$).

مواد و امکانات آموزشی

- تخته سیاه/وایت برد بزرگ.
- ویدئوپروژکتور.
- دسترسی به اینترنت پایدار (برای نمایش مثال‌های تعاملی).
- منابع کتابخانه‌ای، فیلم‌های ضبط‌شده کلاس درس و ترم قبل.
- فایل‌های PDF که در اختیار دانشجویان قرار می‌گیرد.
- نرم‌افزارهای ریاضی (Mathematica، Sage) — اختیاری.

برخی منابع پیشنهادی برای مطالعه

۱. مانکرز، جیمز ر. توپولوژی: نخستین درس‌نویسته. ترجمه یحیی تابش و همکاران، مرکز نشر دانشگاهی.
۲. Hermann, N. Bourbaki, *Part Topology, General Mathematics: of Elements* ۱ & ۲. Paris, ۱۹۶۶.
۳. Holden-Day, *Topology General of Elements* S.-T. Hu, ۱۹۶۴.
۴. Publications, Dover *Topology General* S. Willard, ۲۰۰۴.
۵. Prentice-Hall, *Course First A Topology*: R. J. Munkres.
۶. سایت شخصی مدرس: <https://m.kowkabi.student.um.ac.ir>

روش تدریس

- سخنرانی و تدریس مفاهیم نظری با تأکید بر شهود هندسی و مثال‌های روزمره.
- پرسش و پاسخ تعاملی در کلاس برای تثبیت مفاهیم.
- حل مسائل نمونه و اثبات قضایا به صورت گروهی روی تخته.
- برگزاری کارگاه‌های عملی و جلسات حل تمرین.
- استفاده از ابزارهای کمک‌آموزشی بصری (نمودار، فیلم، نرم‌افزار).
- تقسیم اثبات‌های طولانی به گام‌های کوچک برای کاهش بار شناختی.

وظایف دانشجوی

دانشجو باید یکی از انواع ارزشیابی غیر از امتحان که در قسمت «شیوه ارزشیابی» بیان شده است را انتخاب کند و هر هفته وظایف محوله را انجام دهد و آن را PDF کرده و به ایمیل استاد ارسال کند. وظایف شامل:

۱. تهیه جزوه دست‌نویس قبل از هر جلسه به کمک فایل‌های PDF و فیلم آموزشی ترم قبل.
۲. حضور فعال و منظم در کلاس درس و شرکت در مباحث کلاسی.

۳. حل تمرین‌های تحویلی به صورت دست‌نویس و سؤالات کتاب به صورت تایپ شده.
۴. انجام پروژه و/یا حل تمرینات مشکل درس که توسط استاد به عنوان تمرینات پیچیده معرفی می‌شود.
۵. ارائه سمینارهای دانشجویی در زمینه کاربرد مباحث توپولوژی در سایر علوم.

شیوه ارزیابی

ارزشیابی شامل ۵ قسمت است که دانشجو حتماً باید قسمت آزمون‌ها را شرکت کند و از ۴ قسمت دیگر یک قسمت را به دلخواه انتخاب کند:

۱. آزمون‌ها: آزمون میان‌ترم (۶ نمره) و آزمون پایان‌ترم (۹ نمره).
۲. تهیه جزوه دست‌نویس: قبل از هر جلسه به کمک فایل‌های PDF و فیلم آموزشی ترم قبل (امتیازدهی هفتگی).
۳. حضور فعال و منظم: در کلاس درس و شرکت در مباحث کلاسی.
۴. حل تمرین: سؤالات تحویلی به صورت دست‌نویس و سؤالات کتاب به صورت تایپ شده.
۵. پروژه: انجام پروژه و/یا حل تمرینات مشکل درس که توسط استاد معرفی می‌شود.

جمع نمرات:

توضیحات	سهم از نمره کل	روش ارزیابی
تحویل تمرینات هفتگی و مشارکت در کلاس	۳ نمره	حل تمرین و فعالیت کلاسی
تا پایان مبحث فشرده‌گی	۶ نمره	آزمون میان‌ترم
استفاده از نرم‌افزار یا مقاله کوتاه	۲ نمره	پروژه (اختیاری/اجباری)
شامل تمام مباحث با تأکید بر فصول پیشرفته	۹ نمره	آزمون پایان‌ترم
	۲۰ نمره	جمع کل

زمان‌بندی جلسات (تقویم آموزشی)

جلسه	موضوع درس	شرح مختصر
۱	مقدمه و تعریف‌های اولیه	تعریف توپولوژی، اصول T_1-T_3 مجموعه‌های باز و بسته
۲	عملگر بستار و کوراتوفسکی	بستار، درون، مرز، اصول K_1-K_4 قضیه کوراتوفسکی
۳	پایه، زیرپایه، شمارایی	پایه، زیرپایه، تفکیک‌پذیری، شمارای نوع اول و دوم
۴	پیوستگی و معادل‌ها	پیوستگی در نقطه، پیوستگی سراسری، ۵ معادل، نگاشت باز و بسته
۵	ساخت فضاهاى جدید	زیرفضا، حاصل‌جمعی، حاصل‌ضربی، خارج‌قسمتی، نشاننده
۶	همبندی	تعریف همبندی، معادل‌ها، بازه‌ها، مؤلفه‌های همبندی
۷	همبندی راهی و موضعی	همبندی راهی، توپولوژیست سینوس، همبندی موضعی

جلسه	موضوع درس	شرح مختصر
۸	فشردگی	تعریف فشردگی، معادل‌ها، هاینه-بورل، تصویر پیوسته فشرد
۹	حاصل ضرب فشرد	لم لوله، حاصل ضرب متناهی فشرد، قضیه تیخونف
۱۰	اصول جداسازی	T_4-T_0 ، منظم، نرمال، لم اوريسن، قضیه تیتز
۱۱	پالایه و تور	تور، پالایه، فرایالایه، همگرایی، قضیه زیرپایه الکساندر
۱۲	متریک‌پذیری	فضای متریک، هم‌ارزی مترها، قضیه اورایسون، خم فضا پرکن
۱۳	گروه‌های توپولوژیک	گروه توپولوژیک، زیرگروه، فضای همگن، قضیه کاکوتائی
۱۴	مرور و پروژه نهایی	جمع‌بندی، ارائه پروژه‌های دانشجویی، مسیر ادامه

شرح تفصیلی جلسات

جلسه ۱: مقدمه و تعریف‌های اولیه

- شروع جلسه (۱۰ دقیقه): مرور پیش‌نیازها + ایجاد انگیزه با مثال «شهر و محله‌ها».
- مفهوم‌سازی (۲۰ دقیقه): تعریف توپولوژی با اصول T_1-T_3 + مثال‌های گسسته، پادگسسته، متناهی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): تمرین فردی: بررسی اصول توپولوژی برای ۳ خانواده مختلف.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): ارائه خروجی‌ها + تحلیل اشتباهات رایج (باز $\neq$ بسته).
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (نوشتن ۳ مثال) + پیش‌نیاز جلسه بعد.

جلسه ۲: عملگر بستار و کوراتوفسکی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور تعریف بستار + مثال ساده.
- مفهوم‌سازی (۲۰ دقیقه): چهار خاصیت K_1-K_4 + قضیه کوراتوفسکی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): اثبات گروهی K_4 روی تخته (هر گروه یک گام).
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): تحلیل اثبات‌ها + رفع اشکال.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (اثبات K_4 برای دو مجموعه).

جلسه ۳: پایه، زیرپایه، شمارایی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور بستار + مثال پایه در $\mathbb{R}$.
- مفهوم‌سازی (۲۰ دقیقه): تعریف پایه، زیرپایه، شرط پایه بودن + شمارایی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): ساخت پایه برای $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Q}$ ، فضای متناهی.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): مقایسه پایه‌ها + تحلیل شمارایی.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (ساخت پایه برای $\mathbb{R}$).

جلسه ۴: پیوستگی و معادل‌ها

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور پایه + مثال پیوستگی در $\mathbb{R}$.
- مفهوم‌سازی (۲۰ دقیقه): تعریف پیوستگی + ۵ معادل.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): اثبات معادل‌ها به صورت گروهی.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): تحلیل اثبات‌ها + مثال نقض.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (اثبات معادل (۲) $\Rightarrow$ (۳)).

جلسه ۵: ساخت فضاهای جدید

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور پیوستگی + مثال زیرفضا.
- مفهوم‌سازی (۲۰ دقیقه): زیرفضا، حاصل ضرب، خارج قسمت.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): ساخت $\mathbb{R}^2$ ، $[0, 1]/\{0, 1\}$ ، $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): مقایسه فضاها + تحلیل همسان‌ریختی.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (ساخت $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$).

جلسه ۶: همبندی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور ساخت فضاها + مثال همبندی.
- مفهوم‌سازی (۲۰ دقیقه): تعریف همبندی + معادل‌ها.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): اثبات همبندی $[0, 1]$ با روش سوپریم.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): تحلیل اثبات + مثال‌های ناهمبند.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (اثبات همبندی $[0, 1]$).

جلسه ۷: همبندی راهی و موضعی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور همبندی + مثال مسیر.
- مفهوم‌سازی (۲۰ دقیقه): همبندی راهی، مؤلفه‌ها، همبندی موضعی.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): تحلیل توپولوژیست سینوس.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): تحلیل مثال نقض + مؤلفه‌ها.
- جمع‌بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (رسم توپولوژیست سینوس).

جلسه ۸: فشردگی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور همبندی + مثال پوشش.
- مفهوم سازی (۲۰ دقیقه): تعریف فشردگی + معادل ها.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): شبیه سازی پوشش برای $[0, 1]$ و $(0, 1)$.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): تحلیل تفاوت ها + هاینه-بورل.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (اثبات فشردگی $[0, 1]$).

جلسه ۹: حاصل ضرب فشرده

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور فشردگی + مثال $[0, 1]^2$.
- مفهوم سازی (۲۰ دقیقه): لم لوله + قضیه تیخونف.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): اثبات لم لوله به صورت گروهی.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): تحلیل اثبات + مثال های نقض.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (اثبات لم لوله).

جلسه ۱۰: اصول جداسازی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور تیخونف + مثال T_2 .
- مفهوم سازی (۲۰ دقیقه): $T_4 - T_0$ ، منظم، نرمال، لم اورینسن.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): جدول مقایسه + اثبات سلسله مراتب.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): تحلیل لم اورینسن + مثال ها.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (اثبات نرمال $\Rightarrow$ منظم).

جلسه ۱۱: پالایه و تور

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور جداسازی + مثال دنباله.
- مفهوم سازی (۲۰ دقیقه): تور، پالایه، فراپالایه.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): اثبات همگرایی فراپالایه + رابطه تور-پالایه.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): تحلیل قضیه تیخونف با پالایه.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (اثبات همگرایی فراپالایه).

جلسه ۱۲: متریک پذیری

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور پالایه + مثال متر.
- مفهوم سازی (۲۰ دقیقه): متریک پذیری، اورایسون، ناگاتا-اسمیرنوف.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): اثبات متریک پذیری $\mathbb{R}$ با اورایسون.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): تحلیل خم فضا پرکن.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (اثبات متریک پذیری $\mathbb{R}$).

جلسه ۱۳: گروه های توپولوژیک

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور متریک پذیری + مثال گروه.
- مفهوم سازی (۲۰ دقیقه): گروه توپولوژیک، زیرگروه، فضای همگن.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): تحلیل $GL(n)$ ، $SU(n)$ ، $SO(n)$.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): قضیه کاکوتائی + بیرکف.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + تکلیف (اثبات فشردگی $SO(n)$).

جلسه ۱۴: مرور و پروژه نهایی

- شروع (۱۰ دقیقه): مرور کلی + نقشه مفهومی.
- مفهوم سازی (۲۰ دقیقه): جمع بندی ارتباط مفاهیم.
- کارگاه عملی (۳۰ دقیقه): ارائه پروژه های نهایی.
- بحث و بازخورد (۲۰ دقیقه): بازخورد سازنده + ارزیابی.
- جمع بندی (۱۰ دقیقه): خلاصه + مسیر ادامه.

نقشه راه یادگیرنده دوره توپولوژی مقدماتی

مسیر گام به گام

- هفته ۱-۲: تعریف توپولوژی، باز/بسته، بستار، درون، مرز.
- هفته ۳-۴: پایه، زیرپایه، شمارایی، پیوستگی.
- هفته ۵-۶: ساخت فضا های جدید (زیرفضا، حاصل ضرب، خارج قسمت).
- هفته ۷-۸: همبندی، همبندی راهی، همبندی موضعی.
- هفته ۹-۱۰: فشردگی، هاینه-بورل، حاصل ضرب فشرده.
- هفته ۱۱-۱۲: اصول جداسازی، لم اورینسن، پالایه و تور.
- هفته ۱۳-۱۴: متریک پذیری، گروه های توپولوژیک، پروژه نهایی.

سه نقطه عطف کلیدی

۱. جلسه ۲: اثبات قضیه کوراتوفسکی — درک اینکه چهار خاصیت ساده، کل توپولوژی را می‌سازند.
۲. جلسه ۷: دیدن توپولوژیست سینوس — درک اینکه $\text{همبند} \neq \text{همبند راهی}$.
۳. جلسه ۱۲: اثبات قضیه اورایسون — درک اینکه منظم + شمارای دوم $\Rightarrow$ متریک‌پذیر.

سه چالش پیش‌بینی‌شده و راهکار عبور

۱. چالش: انتزاعی بودن تعریف توپولوژی. راهکار: شروع با مثال‌های ملموس (شهر، محله).
۲. چالش: اثبات‌های چندمرحله‌ای (کوراتوفسکی، اورایسون). راهکار: تقسیم به گام‌های کوچک + اثبات گروهی.
۳. چالش: تفاوت مفاهیم مشابه (همبند/همبند راهی، فشرده/بسته و کراندار). راهکار: جدول مقایسه + مثال نقض.

جمله انگیزشی

«توپولوژی، هنر دیدن نزدیکی بدون اندازه‌گیری فاصله است — و شما در آستانه یادگیری این هنر هستید.»

چک‌لیست خودارزیابی پایان دوره

- ✓ می‌توانم توپولوژی را با اصول موضوع تعریف کنم.
- ✓ می‌توانم قضیه کوراتوفسکی را اثبات کنم.
- ✓ می‌توانم بستار، درون و مرز را محاسبه کنم.
- ✓ می‌توانم پایه و زیرپایه بسازم.
- ✓ می‌توانم پیوستگی را با ۵ معادل توضیح دهم.
- ✓ می‌توانم فضاهای جدید بسازم (زیرفضا، حاصل ضرب، خارج قسمت).
- ✓ می‌توانم همبندی و همبندی راهی را تشخیص دهم.
- ✓ می‌توانم فشرده‌گی را با پوشش‌ها اثبات کنم.
- ✓ می‌توانم قضیه تیخونف را با پالایه اثبات کنم.
- ✓ می‌توانم اصول جداسازی $T_4 - T_0$ را تشخیص دهم.
- ✓ می‌توانم لم اورایسون را بیان و اثبات کنم.
- ✓ می‌توانم متریک‌پذیری را با اورایسون تحلیل کنم.
- ✓ می‌توانم گروه‌های توپولوژیک را تحلیل کنم.
- ✓ می‌توانم یک پروژه اثبات کامل ارائه کنم.