

طرح درس ریاضی عمومی ۲ — ریاضیات و کاربردها

۱. شناسنامه درس

- عنوان درس: ریاضی عمومی ۲
- کد درس: [درج شود]
- مقطع و رشته: کارشناسی، ریاضیات و کاربردها
- تعداد واحد: ۳
- پیش‌نیاز: ریاضی عمومی ۱
- نیمسال: [درج شود]
- نام مدرس: دکتر مجید کوکبی

۲. فلسفه و چشم‌انداز

این درس با هدف گذر از محاسبات صرف تک‌متغیره انتگرال، دانشجویان را به درک عمیق هندسی و تحلیلی حساب چندمتغیره هدایت می‌کند. تمرکز اصلی بر پرورش شهود هندسی، تسلط محاسباتی در مواجهه با مسائل پیچیده‌تر و کاربرد این ابزارها در مدل‌سازی‌های علمی و مهندسی خواهد بود. رویکرد تدریس بر مبنای ترکیب فعالانۀ دانشجویان از طریق فعالیت‌های چندحسی (Augmented Senses)، شبیه‌سازی‌های تعاملی با استفاده از نرم‌افزارهای تخصصی و اجرای پروژه‌های عملی قرار دارد که همگی در جهت تسهیل یادگیری عمیق، پایدار و معنادار طراحی شده‌اند.

۳. هدف کلی

هدف اصلی این درس، توانمندسازی دانشجویان در تحلیل و حل مسائل محاسباتی و مدل‌سازی‌های کاربردی است. این توانمندی از طریق تسلط بر انتگرال‌های تک‌متغیره و چندمتغیره، درک عمیق سری‌ها و تقریب‌های تابعی، بهره‌گیری از مختصات‌های مختلف (مانند قطبی، استوانه‌ای و کروی) و کاربرد صحیح قواعد مشتق‌گیری چندمتغیره حاصل خواهد شد.

۴. نتایج یادگیری رفتاری

پس از اتمام موفقیت‌آمیز این درس، دانشجویان قادر خواهند بود:

- انتگرال و کاربردهای آن:
 - انتگرال‌های معین و نامعین را با استفاده از روش‌های استاندارد (جایگذاری، جزء به جزء، کسر جزئی، مثلثاتی) محاسبه کنند.
 - کاربردهای انتگرال در محاسبه مساحت نواحی صفحه، حجم اجسام دورانی و حاصل از دوران، و طول قوس منحنی‌ها را تحلیل و پیاده‌سازی نمایند.
- دنباله‌ها و سری‌ها:
 - مفهوم همگرایی و واگرایی دنباله‌ها و سری‌های عددی را درک کرده و آزمون‌های مختلف همگرایی (مانند آزمون مقایسه، آزمون نسبت، آزمون ریشه، آزمون انتگرال) را برای تعیین سرنوشت سری‌ها به کار گیرند.
 - شعاع و بازه همگرایی سری‌های توانی را تعیین کنند و کاربرد آن‌ها را در نمایش توابع بررسی نمایند.
 - قضیه تیلور با باقیمانده را به کار گرفته و با استفاده از چندجمله‌ای‌های تیلور، تقریب‌های ارزیابی‌شده‌ای از توابع ارائه دهند و خطای تقریب را تخمین بزنند.
- هندسه تحلیلی و حساب چندمتغیره:
 - معادلات پارامتری و مختصات قطبی را برای توصیف و تحلیل منحنی‌ها در صفحه و فضا به کار گیرند.
 - مفاهیم فضای سه‌بعدی را با استفاده از مختصات دکارتی، استوانه‌ای و کروی درک کرده و انتگرال‌های دوگانه و سه‌گانه را در این دستگاه‌ها محاسبه کنند.
 - مفهوم توابع چندمتغیره، نمودارهای تراز، مشتقات جزئی و گرادیان را درک کرده و به درستی به کار گیرند.
 - قاعده زنجیره‌ای برای توابع چندمتغیره و دیفرانسیل کامل را در حل مسائل مربوط به نرخ تغییرات ترکیبی و تقریبی به کار ببرند.
 - ترتیب انتگرال‌گیری در انتگرال‌های چندگانه را تغییر داده و از تبدیلات مختصات مناسب (مانند تبدیل به مختصات قطبی) برای ساده‌سازی محاسبات استفاده کنند.
- ابزارهای محاسباتی و بصری‌سازی:
 - از نرم‌افزارهای GeoGebra و Desmos برای تجسم هندسی مفاهیم (مانند منحنی‌ها، سطوح، بردارها) و از محیط برنامه‌نویسی Python (با کتابخانه‌های NumPy و Matplotlib) برای انجام محاسبات عددی، شبیه‌سازی و تأیید نتایج بهره ببرند.

۵. برنامه هفتگی (۱۴ هفته) — شروع با آموزش انتگرال

هفته	موضوع اصلی	جزئیات و فعالیت‌ها	مؤلفه‌های آموزشی
۱	مرور انتگرال نامعین و تکنیک‌های اصلی (بدون احتساب مقدمات اولیه درس از ریاضی عمومی ۱)	مرور مفاهیم انتگرال نامعین، انتگرال معین از طریق حد مجموع ریمان. تکنیک‌های اصلی انتگرال‌گیری: جایگذاری، جزء به جزء.	* کلاس معکوس: میکروویدئوی کوتاه (۸-۱۲ دقیقه) شامل مرور نظریه و مثال‌های حل‌شده.
	* درس معکوس: حل تمرینات با راهنمایی در کلاس. * دفترچه تمرین (Jupyter Notebook): حل عددی برخی انتگرال‌ها با پایتون.		
۲	کاربردهای انتگرال معین: مساحت، حجم، طول قوس (توابع پارامتری)	محاسبه مساحت بین منحنی‌ها، مساحت نواحی قطبی. کاربرد انتگرال در محاسبه طول قوس. معادلات پارامتری برای منحنی‌ها و محاسبه طول قوس آن‌ها.	* Augmented Senses: انیمیشن تعاملی برای تجسم محاسبه طول قوس یک منحنی پارامتری.
	* کارگاه Desmos: استفاده از Desmos برای رسم توابع پارامتری و نواحی با مساحت مشخص، و تحلیل هندسی طول قوس.		
۳	تکنیک‌های پیشرفته به جزء مکرر، انتگرال‌گیری و انتگرال‌گیری با جانشینی مثلثاتی، روش کسر جزئی.	انتگرال‌گیری با روش جزء پیشرفته به جزء مکرر، انتگرال‌گیری با جانشینی مثلثاتی، روش کسر جزئی.	* کارگاه تبدیل دستگاه: تمرین تبدیل معادلات از دکارتی به قطبی و بالعکس.

هفته	موضوع اصلی	جزئیات و فعالیت‌ها	مؤلفه‌های آموزشی
	انتگرال در دستگاه قطبی	انتگرال‌گیری از توابع در دستگاه قطبی: $\int f(r, \theta) r dr d\theta$	
* کارگاه محاسبه مساحت قطبی: تمرین محاسبه مساحت نواحی مشخص شده با معادلات قطبی.			
* تمرین گروهی: حل مسائل ترکیبی شامل تکنیک‌های مختلف.			
۴	انتگرال‌های نامعین (Improper Integrals) و	تعریف انتگرال‌های ناسره (ناپهنجار) بر روی بازه‌های نامحدود و توابعی که در نقاط خاصی تعریف نشده‌اند. آزمون‌های همگرایی برای انتگرال‌های ناسره (آزمون مقایسه، مقایسه حدی).	* آزمایشگاه عددی (Jupyter Notebook): پیاده‌سازی عددی انتگرال‌های ناسره برای مشاهده تقریبی همگرایی یا واگرایی و نوسانات.
۵	مقدمه‌ای بر دنباله‌ها و سری‌های عددی	تعریف دنباله و حد دنباله. سری‌های عددی: مجموع جزئی، تعریف همگرایی و واگرایی. سری هندسی و سری تلسکوپی.	* کوئیز تعاملی: سؤالات کوتاه و فوری برای سنجش درک مفاهیم پایه دنباله و سری.
* بحث گروهی: تحلیل شرایط همگرایی سری‌های هندسی و تلسکوپی.			
۶	آزمون‌های همگرایی سری‌های عددی	آزمون مقایسه، آزمون نسبت، آزمون انتگرال. همگرایی شرطی و همگرایی مطلق.	* کارت‌های مفهومی: آماده‌سازی کارت‌هایی با خلاصه آزمون‌ها و مثال‌های کاربردی.
* تمرینات هم‌گروهی:			

هفته	موضوع اصلی	جزئیات و فعالیت‌ها	مؤلفه‌های آموزشی
دانشجویان با هم به حل مسائل پیچیده‌تر که نیاز به انتخاب آزمون مناسب دارند، می‌پردازند.			
۷	سری‌های توانی، شعاع و بازه همگرایی	تعریف سری توانی. تعیین شعاع و بازه همگرایی با استفاده از آزمون نسبت/ریشه. نمایش توابع به صورت سری توانی.	* پروژه کوچک (Python): تقریب توابع معروف (مانند e^x , $\sin x$, $\cos x$) با استفاده از سری توانی و پیاده‌سازی آن در پایتون برای مشاهده دقت تقریب.
۸	قضیه تیلور با باقیمانده و تقریب‌های چندجمله‌ای	توسعه تیلور و مک‌لورن. فرمول باقیمانده لاگرانژ و کوشی. تخمین خطا در تقریب‌های چندجمله‌ای.	* انیمیشن تعاملی: نمایش گرافیکی چگونگی تقارب چندجمله‌ای‌های تیلور با تابع اصلی هنگام افزایش درجه چندجمله‌ای.
* میان‌ترم ۱: در پایان این هفته برگزار خواهد شد.			
۹	بردارها، خطوط و صفحات در $\mathbb{R}^3$	نمایش نقاط و بردارها در مختصات فضایی، فضای سه‌بعدی. معادلات پارامتری و ناپارامتری سه‌بعدی بردارها، خطوط و صفحات در $\mathbb{R}^3$ خطوط و صفحات. هندسه صفحات. امکان استفاده از خطوط و صفحات. واقعیت افزوده (AR) برای درک بهتر ابعاد.	* GeoGebra 3D و AR: استفاده از GeoGebra برای ترسیم و مشاهده بردارها، خطوط و صفحات در $\mathbb{R}^3$ خطوط و صفحات. هندسه صفحات. امکان استفاده از خطوط و صفحات. واقعیت افزوده (AR) برای درک بهتر ابعاد.
۱۰	توابع چندمتغیره، نمودار تراز، مشتقات جزئی و گرادیان	تعریف توابع چندمتغیره. نمایش توابع دو متغیره با استفاده از سطوح در فضا و نمودارهای تراز (Level Curves). تعریف محاسبه مشتقات جزئی. مفهوم گرادیان و جهت بیشترین افزایش.	* کارگاه محاسبات مشتقات جزئی: تمرین محاسبه مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم.

مؤلفه‌های آموزشی	جزئیات و فعالیت‌ها	موضوع اصلی	هفته
			* نمایش بردار گرادیان در GeoGebra: تجسم هندسی بردار گرادیان در نقاط مختلف روی سطح تابع.
* مثال‌های کاربردی: تحلیل مسائل فیزیک (مانند نرخ تغییرات در پدیده‌های وابسته) و مهندسی (مانند تحلیل تنش).	کاربرد قاعده زنجیره‌ای برای توابع مرکب. مفهوم دیفرانسیل کامل و کاربرد آن در تقریب. تغییر متغیر در مشتق‌گیری.	قاعده زنجیره‌ای چندمتغیره، دیفرانسیل کامل و تغییر متغیر	۱۱
			* تمرینات پروژه‌ای: مسائل کاربردی که نیاز به به‌کارگیری قاعده زنجیره‌ای دارند.
* انیمیشن تعاملی: نمایش بصری چگونگی تغییر ترتیب انتگرال‌گیری و تأثیر آن بر شکل ناحیه انتگرال‌گیری. (اولین انیمیشن اصلی درس)	تعریف انتگرال دوگانه. نمایش هندسی انتگرال دوگانه به عنوان حجم. محاسبه انتگرال دوگانه بر روی نواحی مستطیلی و عمومی. تبدیل انتگرال دوگانه به مختصات قطبی.	انتگرال‌های دوگانه: محاسبه، تبدیل به قطبی و تعویض ترتیب انتگرال‌گیری	۱۲
			* کارگاه: حل مسائل چالش‌برانگیز با تعویض ترتیب انتگرال‌گیری.
* کارگاه محاسباتی (Python/NumPy): حل مسائل انتگرال سه‌گانه با استفاده از پایتون.	تعریف انتگرال سه‌گانه. محاسبه انتگرال سه‌گانه در دستگاه مختصات دکارتی. تبدیل انتگرال سه‌گانه به دستگاه مختصات استوانه‌ای و	انتگرال‌های سه‌گانه: دستگاه دکارتی، استوانه‌ای و کروی؛ کاربردها	۱۳

هفته	موضوع اصلی	جزئیات و فعالیت‌ها	مؤلفه‌های آموزشی
		کروی. کاربردها در محاسبه حجم، جرم، مرکز جرم و گشتاور لختی.	
			* شبیه‌سازی سه‌بعدی: تجسم نواحی و اجسام در فضای سه‌بعدی برای محاسبه انتگرال‌های سه‌گانه.
		مرور کلی، ارائه جمع‌بندی مباحث کلیدی	
۱۴	جلسه نمایشگاه پروژه (Project Showcase)	پروژه‌های ویژه و درس. ارائه پروژه‌های ویژه دانشجویان. تبادل دانش و بازخورد. آمادگی برای آزمون پایان‌ترم.	* ارائه‌های گروهی: هر گروه پروژه خود را در قالب ۵ دقیقه ارائه می‌دهد.
			* بازخورد هم‌تا: دانشجویان به ارائه‌های یکدیگر بازخورد می‌دهند.
			* جمع‌بندی: مرور نکات مهم و پاسخ به سؤالات احتمالی برای آزمون پایان‌ترم.

۶. روش‌های تدریس

برای دستیابی به اهداف درس و نتایج یادگیری رفتاری، از روش‌های تدریس متنوع و تعاملی استفاده خواهد شد:

- کلاس معکوس (Flipped Classroom): ارائه میکروویدئوهای کوتاه (۸-۱۲ دقیقه‌ای) برای پوشش مباحث تئوری و مثال‌های حل‌شده قبل از کلاس. این ویدئوها امکان مرور و یادگیری در زمان و مکان دلخواه را فراهم می‌کنند.
- سخنرانی‌های تعاملی و حل مسئله گروهی: در کلاس، زمان به حل تمرینات، پاسخ به سؤالات دانشجویان، بحث و تبادل نظر و حل مسائل پیچیده‌تر به صورت گروهی اختصاص می‌یابد.

- کارگاه‌های عملی با نرم‌افزارهای تخصصی:
- استفاده عملی از نرم‌افزارهای GeoGebra و Desmos برای تجسم هندسی
- مفاهیم (مانند منحنی‌ها، سطوح، بردارها) و Jupyter Notebook همراه با زبان برنامه‌نویسی Python برای محاسبات عددی، شبیه‌سازی و تحلیل داده‌ها.
- انیمیشن‌ها و مؤلفه‌های Augmented Senses:
- برای درک بهتر مفاهیم انتزاعی و پیچیده، از انیمیشن‌های تعاملی (مانند تغییر ترتیب انتگرال‌گیری، نمایش همگرایی سری تیلور) و ابزارهای واقعیت افزوده (در صورت امکان) استفاده خواهد شد.

۷. شیوه ارزشیابی

ارزیابی دانشجویان به صورت ترکیبی و با در نظر گرفتن جنبه‌های مختلف یادگیری صورت خواهد گرفت:

- تمرینات و آزمونک‌های هفتگی: ۲۰%
- شامل تمرینات خانگی، کوییزهای کوتاه کلاسی و تکالیف بارگذاری شده در سامانه.
- میان‌ترم: ۲۵%
- امتحانی جامع که پس از هفته ۸ برگزار شده و مباحث نیمه اول ترم را پوشش می‌دهد.
- پروژه ویژه «ریاضیات در عمل»: ۲۵%
- این پروژه فرصتی برای به‌کارگیری مباحث درس در حل مسائل واقعی است و شامل:
- پروپوزال (یک صفحه)
- محاسبات تحلیلی
- شبیه‌سازی یا تجسم با GeoGebra یا Python
- گزارش نهایی به فرمت LaTeX (حداقل ۶ صفحه)
- ارائه ۵ دقیقه‌ای در هفته ۱۴
- مشارکت و کارگاه‌ها: ۵%
- این بخش شامل حضور فعال در کلاس‌ها و کارگاه‌ها، مشارکت در بحث‌های کلاسی، ارسال پیش‌مطالب لازم و تلاش در حل مسائل گروهی است.
- معیارها (نمونه عینی برای کسب امتیاز از ۵):
- حضور فعال در حداقل ۸۰٪ جلسات: ۲ امتیاز
- ارسال جزوه دستنویس یا خلاصه مباحث قبل از کلاس (برای حداقل ۶ جلسه از ۱۲ جلسه): ۱ امتیاز
- شرکت در حداقل یک ارائه کوتاه کلاسی یا کمک به رفع اشکال همکلاسی‌ها: ۱ امتیاز

- کمک فنی و مشارکت فعال در کارگاه‌های گروهی (GeoGebra/Python): ۱ امتیاز
- آزمون پایان‌ترم: ۲۵٪
- امتحانی جامع که تمامی مباحث درس را پوشش می‌دهد.

۸. پروژه ویژه — «ریاضیات در عمل» (جزئیات)

هدف: هدف این پروژه، تشویق دانشجویان به استفاده خلاقانه از مفاهیم و ابزارهای ریاضی آموخته شده در درس برای مدل‌سازی، تحلیل و ارائه راه‌حل برای یک پدیده واقعی یا مسئله کاربردی است. این پروژه با هدف پل زدن بین دانش نظری و کاربردهای عملی طراحی شده است.

ساختار و الزامات:

1. پروپوزال (Proposal):
 - یک صفحه که شامل معرفی مسئله، چرایی اهمیت آن، اهداف پروژه، روش پیشنهادی برای حل و ابزارهای مورد استفاده (مانند Python، GeoGebra) است. این پروپوزال باید قبل از شروع کار عملی به تأیید مدرس برسد.
2. محاسبات تحلیلی:
 - استفاده از ابزارهای حساب دیفرانسیل و انتگرال چندمتغیره (مشتقات جزئی، انتگرال‌های دوگانه/سه‌گانه، سری‌ها) برای مدل‌سازی و تحلیل ریاضی مسئله.
3. شبیه‌سازی و تجسم (Simulation/Visualization):
 - پیاده‌سازی مدل ریاضی با استفاده از نرم‌افزارهای GeoGebra (برای تجسم هندسی سه‌بعدی) یا Python (برای محاسبات عددی، رسم نمودارها و شبیه‌سازی دینامیک).
4. گزارش نهایی (LaTeX Report):
 - تدوین یک گزارش کامل و حرفه‌ای به فرمت LaTeX (حداقل ۶ صفحه) که شامل:
 - مقدمه و بیان مسئله
 - مرور ادبیات (در صورت نیاز)
 - توضیح مدل ریاضی و فرضیات
 - جزئیات محاسبات تحلیلی
 - توضیحات کامل کد شبیه‌سازی و نتایج حاصل از آن
 - تحلیل و تفسیر نتایج
 - نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای کارهای آتی
 - منابع

5.

ارائه ۵ دقیقه‌ای:

- ارائه خلاصه‌ای از پروژه، نتایج کلیدی و یافته‌های مهم در جلسه نمایشگاه پروژه (هفته ۱۴).

نمونه موضوعات پیشنهادی:

- محاسبه حجم و مرکز جرم یک مخزن با شکل نامنتقارن.
 - مدل‌سازی میدان گرادیان یا دایورجنس برای توزیع چگالی گرما یا مواد.
 - استفاده از تقریب تیلور برای شبیه‌سازی نوسانات کوچک سیستم‌های فیزیکی (مانند پاندول).
 - تحلیل مسیر و سرعت یک جسم با استفاده از معادلات پارامتری در فضا.
 - محاسبه سطح مقطع یا حجم حاصل از برخورد دو جسم.
- سیاست مالکیت: مشارکت دانشجویان در پروژه‌های ویژه با کسب رضایت آن‌ها، می‌تواند در گالری پروژه‌های دانشگاه یا در پلتفرم‌های آموزشی جهت استفاده سایر دانشجویان منتشر شود.

۹. منابع پیشنهادی

- کتب مرجع اصلی:
- Stewart, James. Calculus: Early Transcendentals. (مجموعه کتاب‌های استوارت یکی از پرکاربردترین منابع حساب دیفرانسیل و انتگرال است).
- Thomas, George B., and Ross L. Finney. Calculus and Analytic Geometry. (یکی دیگر از منابع کلاسیک و جامع).
- منابع آنلاین:
- Paul's Online Math Notes (<http://tutorial.math.lamar.edu/>) یک منبع رایگان و بسیار مفید برای مرور مفاهیم و حل مثال.
- منابع بصری و شهودی:
- GeoGebra (<https://www.geogebra.org/>) نرم‌افزار رایگان برای هندسه، جبر، حساب دیفرانسیل و انتگرال و آمار.
- Desmos (<https://www.desmos.com/>) ماشین حساب گرافیکی آنلاین و ابزار بصری‌سازی.
- 3Blue1Brown (YouTube Channel) ویدئوهای انیمیشنی فوق‌العاده برای درک شهودی مفاهیم ریاضی.
- منابع برنامه‌نویسی:
- Jupyter Notebook (<https://jupyter.org/>) محیط تعاملی برای کدنویسی پایتون.
- NumPy Library (<https://numpy.org/>) کتابخانه پایه‌ای برای محاسبات عددی در پایتون.

۱۰. نکات اجرایی

- آمادگی قبل از کلاس: برای هر هفته، یک یا دو میکروویدئوی کوتاه (۸–۱۲ دقیقه‌ای) شامل مرور مفاهیم تئوری و مثال‌های حل‌شده، از طریق سامانهٔ آموزش مجازی برای دانشجویان ارسال خواهد شد. دانشجویان موظف به مشاهدهٔ این ویدئوها قبل از حضور در کلاس هستند.
- تکالیف عملی: تمامی تکالیف عملی (مانند تمرینات Jupyter Notebook، گزارش‌های کدنویسی) باید در قالب فایل‌های PDF یا Jupyter Notebook در سامانهٔ آموزش مجازی بارگذاری شوند.
- پروژهٔ ویژه: از نیمهٔ دوم ترم (تقریباً از هفتهٔ ششم به بعد) امکان ارسال پروپوزال پروژهٔ ویژه «ریاضیات در عمل» فراهم خواهد شد.
- نمایشگاه پروژه: جلسهٔ ارائهٔ پروژه‌های ویژه و اختتامیهٔ درس در هفتهٔ ۱۴ برگزار خواهد شد.
- ارتباط مستمر: دانشجویان تشویق می‌شوند تا در طول ترم سوالات خود را از طریق ایمیل، انجمن‌های آنلاین یا ساعات اداری مدرس مطرح نمایند.

تهیه‌کننده: دکتر مجید کوکی تاریخ: [درج شود]

پیوست: جدول برنامه هفتگی (چکیده)

موضوع اصلی	هفته
انتگرال نامعین — تکنیک‌های اصلی	۱
کاربردهای انتگرال معین — مساحت، طول قوس	۲
انتگرال قطبی، تبدیل مختصات و تکنیک‌های پیشرفته	۳
انتگرال‌های نامناسب (Improper Integrals)	۴
دنباله‌ها و سری‌ها (مقدمه، حد دنباله، سری هندسی)	۵
آزمون‌های همگرایی سری‌های عددی	۶
سری‌های توانی، شعاع و بازهٔ همگرایی	۷
قضیهٔ تیلور، تخمین خطا + میان‌ترم ۱	۸
مختصات فضایی، بردارها، خطوط و صفحات در $\mathbb{R}^3$	۹

موضوع اصلی	هفته
توابع چندمتغیره، مشتقات جزئی و گرادیان	۱۰
قاعده زنجیره‌ای، دیفرانسیل کامل	۱۱
انتگرال‌های دوگانه، تبدیل به قطبی، تعویض ترتیب	۱۲
انتگرال‌های سه‌گانه، استوانه‌ای و کروی؛ کاربردها	۱۳
مرور کلی، ارائه پروژه‌ها و نمایشگاه پروژه	۱۴