بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

مجتمع آموزش عالی گناباد

جزوه درس سیالات محاسباتی

فصل اول : معادلات حاکم بر حرکت سیال

مدرس : دکتر مجتبی باغبان

۲-۱ معادله حاکم بر حرکت سیال:

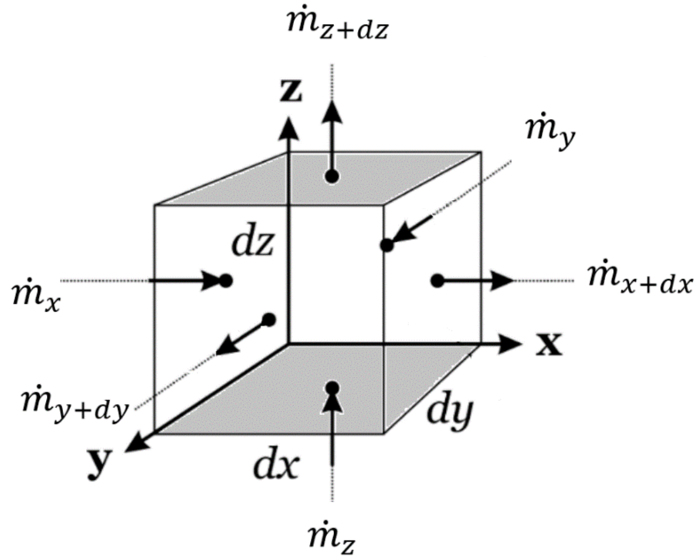
خواص جریان سیال توسط متغیرهای میدان توصیف می‌شود. متغیرهای میدان خصوصیات فیزیکی سیالات هستند که معمولاً برای توصیف مناسب رفتار سیال مورد نیاز هستند. این متغیرها یا مقادیر عددی و یا برداری هستند. متغیرهای عددی شامل چگالی، فشار و دما می‌باشند و متغیر برداری بردار سرعت (شامل سه مولفه) می‌باشد. بنابراین در مجموع با شش مجهول روبرو هستیم که برای یافتن آن‌ها نیاز به شش معادله داریم. معادلات حاکم بر حرکت سیال شامل معادله بقای جرم (یک معادله)، معادلات بقای مومنتوم (سه معادله) و معادله بقای انرژی (یک معادله) می‌باشند. ما هنوز به معادله ششم نیاز داریم. اگر جریان سیال تراکم ناپذیر باشد (مانند جریان مایعات)، نیازی به معادله ششم نداریم، زیرا چگالی مایعات ثابت فرض می‌شود و مقدار آن معلوم است. با این کار فقط پنج متغیر میدانی باقی می ماند که تعداد معادلات کافی برای حل آنها موجود است. اگر چکالی جریان ثابت نباشد (جریان تراکم پذیر) (یعنی اگر گاز باشد)، این معادله ششم معادله گاز ایده آل است. معادله ششم توسط معادلات کمکی (مانند معادله حالت) بیان می‌شود البته در مدل سازی جریان متلاطم، مدل سازی تشعشع، احتراق، جریان‌های چند فازی و غیره معادلات کمکی نیز وارد می‌شوند. در ادامه به برسی این معادلات پرداخته می‌شود.

۲-۱-۱ معادله بقای جرم:

بر اساس قانون بقای جرم جرم از بین نمی‌رود و تولید نمی‌شود. حجم کنترلی به ابعاد $dx.dy.dz$ را در نظر بگیرید که درون یک جریان $\vec{V} = u\hat{\imath} + v\hat{\jmath} + w\hat{k}$ قرار دارد (شکل ۲- ۱). قانون بقای جرم برای این المان

به‌صورت نرخ خالص جرم ورودی و خروجی به حجم کنترل برابر است با تغییرات جرم درون حجم کنترل با زمان بیان می‌شود. شکل ریاضی معادله بقای جرم به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum m_{in} - m_{out} = \frac{dM}{dt} \rightarrow \dot{m}_x + \dot{m}_y + \dot{m}_z - \left(\dot{m}_{x+dx} + \dot{m}_{y+dy} + \dot{m}_{z+dz}\right) = \frac{\partial M}{\partial t}$$



شکل ۲- ۱ جریان‌های جرمی ورودی و خروجی به المان سیال

در این رابطه M جرم درون حجم کنترل می‌باشد و به کمک رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$M = \rho d\forall = \rho dxdydz$$

ρ بیاگر چگالی سیال است. در نتیجه تغییرات جرم حجم کنترل به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial(\rho dxdydz)}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz$$

دبی‌های جرمی ورودی و خروجی به حجم کنترل به‌صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\dot{m}_x = \rho u(dydz)$$

$$\dot{m}_y = \rho v(dxdz)$$

$$\dot{m}_z = \rho v(dydz)$$

در این رابطه به‌عنوان مثال $\dot{m}_x$ دبی جرمی ورودی از صفحه $dydz$ است که به فاصله x از مبدا مختصات قرار دارد. به‌کمک بسط تیلور مقدار دبی خروجی از المان را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\dot{m}_{x+dx} \simeq \dot{m}_x + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x}\ .dx$$

$$\dot{m}_{y+dy} \simeq \dot{m}_y + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y}\ .dy$$

$$\dot{m}_{z+dz} \simeq \dot{m}_z + \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z}\ .dz$$

با جای‌گذاری روابط در معادله بقای جرم داریم :

$$\dot{m}_x + \dot{m}_y + \dot{m}_z - \left(\dot{m}_x + \frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x}\ .dx + \dot{m}_y + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y}\ .dy + \dot{m}_z + \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z}\ .dz\right) = \frac{dM}{dt}$$

با ساده‌سازی معادله فوق به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$-\left(\frac{\partial \dot{m}_x}{\partial x}\ .dx + \frac{\partial \dot{m}_y}{\partial y}\ .dy + \frac{\partial \dot{m}_z}{\partial z}\ .dz\right) = \frac{dM}{dt}$$

با جایگذاری مقادیر دبی جرمی و جرم حجم کنترل معادله بقای جرم و حذف عبارت $dxdydz$ از طرفین معادله، معادله بقای جرم به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

معادله فوق را معادله بقای جرم یا معادله پیوستگی می‌نامند. در حالت کلی معادله بقای جرم با استفاده از عملگر گرادیان به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}.\left(\rho\vec{V}\right) = 0 \qquad (۱-۲)$$

لازم به ذکر است که در مختصات دکارتی معادله بقای جرم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

نکته: جریانی که در آن بتوان از تغییرات زمانی صرف‌نظر کرد را جریان پایا می‌نامیم. بنابراین در جریان پایا جمله $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ صفر خواهد بود.

نکته: جریانی که در آن بتوان از تغییرات چگالی صرف‌نظر کرد را جریان تراکم ناپذیر گویند. جریان مایعات را می‌توان اغلب تراکم ناپذیر دانست. جریان گاز با انتقال گرمای ناچیز نیز ممکن است تراکم ناپذیر در نظر گرفته شود، مشروط بر این‌که سرعت جریان نسبت به سرعت صوت درون سیال کوچک باشد. نسبت سرعت جریان، V، به سرعت محلی صوت، c، در گاز به عنوان عدد ماخ تعریف می‌شود.

$$Ma=\frac{V}{c}$$

برای $Ma<0.3$، حداکثر تغییرات چگالی کمتر از ۵ درصد است. بنابراین، جریان گاز با $Ma<0.3$ را می‌توان به عنوان تراکم ناپذیر در نظر گرفت. سرعت صوت در یک گاز ایده آل با $c=\sqrt{kRT}$ داده می شود که k نسبت گرمای ویژه، R ثابت گاز و T دمای مطلق است.

بنابراین در جریان تراکم ناپذیر $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$ و $\vec{\nabla}.\left(\rho\vec{V}\right)=\rho\vec{\nabla}.\left(\vec{V}\right)$. در نتیجه معادله بقای جرم به‌صورت زیر ساده می‌شود:

$$\vec{\nabla}.\vec{V}=0$$

به‌عنوان مثال در مختصات دکارتی معادله فوق به‌صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}=0$$

نکته: در جریان کاملاً توسعه‌یافته، توزیع سرعت سیال با حرکت در یک محور معین تغییر نمی‌کند. به عنوان مثال در جریان درون لوله در ابتدای لوله توزیع سرعت در رراستای محور لوله به علت رشد لایه مرزی تغییر می‌کند. در نهایت جریان به شکل خاصی می‌رسد که در راستای طول لوله سرعت تغییر نخواهد کرد. در این حالت، جریان ب کامل توسعه یافته است و هیچ تغییری در پروفیل جریان در امتداد متغیر محور x لوله ایجاد نخواهد شد. در این حالت، تمام مشتقات (جزئی) نسبت به x صفر خواهند بود ($\frac{\partial \ldots}{\partial x} = \mathbf{0}$). به عنوان مثال در جریان دوجهته ($w = 0$) بین دو صفحه با فرض این که میدان سرعت در جهت محور x باشد، در حالت کاملا توسعه یافته معادله بقای جرم به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$$

۲-۱-۲ معادله بقای مومنتوم

معادله بقای مومنتوم همان معادله قانون دوم نیوتن است که برای یک المان سیال نوشته شده است. قانون دوم نیوتن به صورت زیر نوشته می‌شود

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

در این رابطه جرم المان به‌صورت حاصل‌ضرب چگالی در حجم محاسبه می‌شود:

$$m = \rho(dxdydz)$$

شتاب یک ذره سیال از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\vec{a} = \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

که در این رابطه $\frac{D\vec{V}}{Dt}$ را مشتق کلی می‌گوییم. مشتق کلی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\Delta \vec{V})\vec{V}$$

این معادله نشان می‌دهد که ذره متحرک سیال دریک میدان جریان دارای دو مولفه شتاب است. جمله $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ را شتاب محلی می‌نامند و زمانی اتفاق می‌افتد که میدان جریان ناپایا و وابسته به زمان باشد. عبارت دوم را شتاب جابجایی گویند. این شتاب ناشی از جابجایی ذره سیال از یک نقطه با یک میدان سرعت به نقطه دیگر با میدان سرعت متفاوت است.

به عنوان مثال در جریان سه جهته در مختصات دکارتی مولفه x شتاب به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_x = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}$$

و یا با استفاده از عملگر گرادیان شتاب ذره به‌صورت زیر بیان می‌شود:

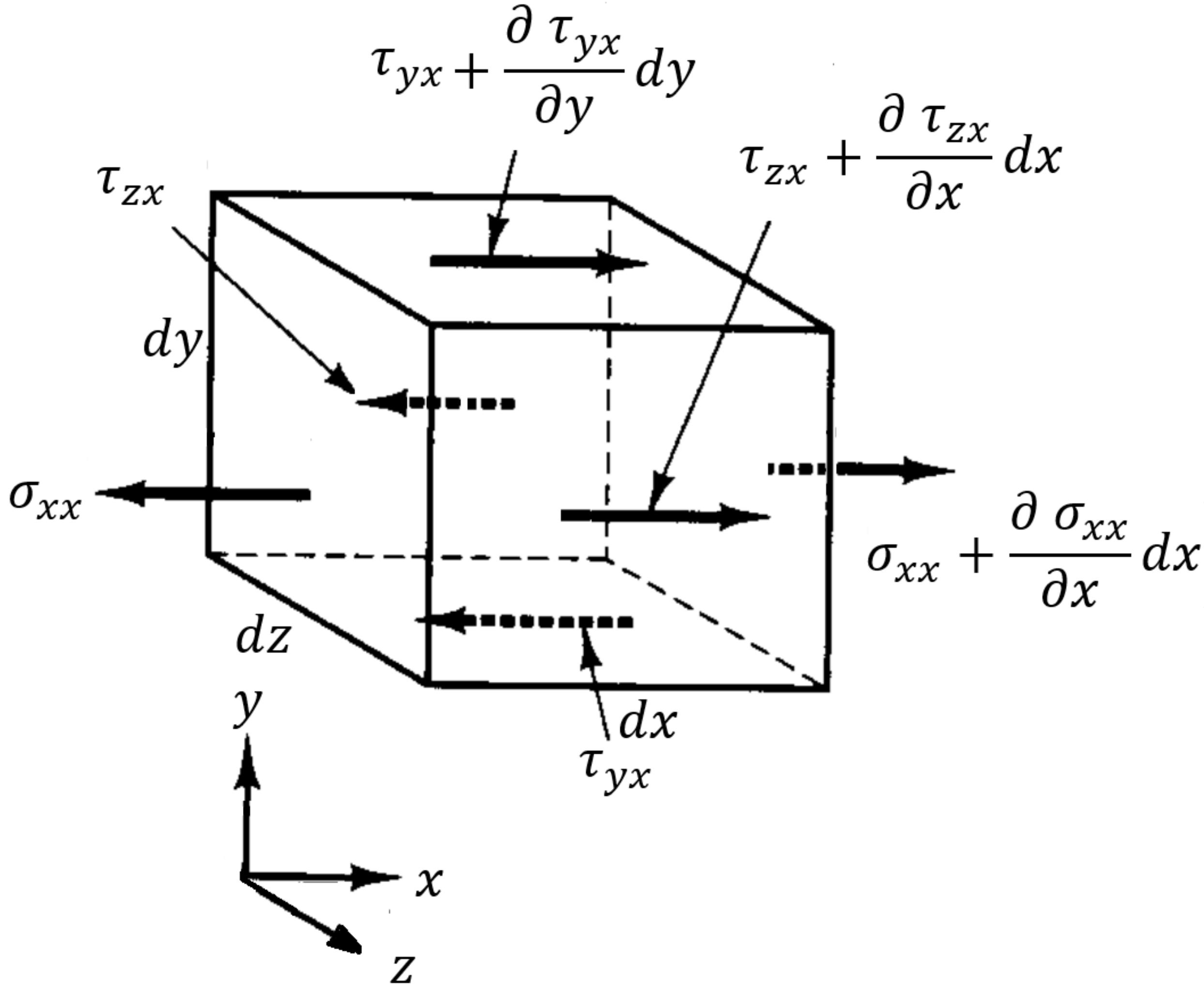
$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{V}.\nabla\vec{V}$$

نیروهای وارد بر یک حجم کنترل شامل نیروهای سطحی و نیروهای حجمی می‌باشند. نیروهای سطحی به دو دسته نیروی فشاری و نیروی لزجی دسته بندی می‌شوند. برخلاف نیروهای سطحی همان‌طور که از نام آن پیداست، نیروهای حجمی روی سطح حجم کنترلی اثر نمی‌گذارند، بلکه بر حجم کل اثر می‌گذارند. نیروهای گرانشی، گریز از مرکز، نیروی الکتریکی و نیروی مغناطیسی از جمله نیروهای حجمی هستند. واحد نیروهای حجمی N/m^3 است که برای اعمال در معادله بقای مومنتوم باید در حجم المان ضرب شود.

شکل ۲- ۲نیروهای وارد بر المان سیال در جهت x را نشان می‌دهد. قانون بقای مومنتوم برای المان سیال به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$ma_x = \sum F_x$$

با جایگذاری مقادیر نیرو معادله فوق به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:



شکل ۲- ۲ نیروهای سطحی وارد بر المان سیال در جهت محور x

$$\rho dxdydz \times a_x = \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right) - \sigma_{xx} + \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}dx\right)\right]dydz + \left[-\tau_{yx} + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy\right)\right]dxdz + \left[-\tau_{zx} + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial\ \tau_{zx}}{\partial z}dz\right)\right]dydz + s_x \times dxdydz$$

در این روابط p فشار ترمودینامیکی است که توسط یک رابطه ترمودینامیکی (معادله حالت) بر حسب چگالی و دما تعیین می‌شود. s_x نیروی حجمی وارد بر حجم کنترل در جهت محور x است. با ساده‌سازی معادله فوق داریم:

$$\rho a_x = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + s_x$$

به‌طور مشابه معادله بقای مومنتوم در جهات دیگر را می‌توان نوشت. شکل کلی معادله بقای مومنتوم برای سه جهت در مختصات دکارتی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + s_x \\
\rho \frac{Dv}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + s_y \\
\rho \frac{Dw}{Dt} &= \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + s_z
\end{aligned} \tag{۲-۲}$$

معادلات فوق معادلات بقای مومنتوم حرکت در کلی‌ترین شکل خود هستند. این معادلات پیچیده هستند. حالت خاص از معادله فوق برای یک سیال نیوتونی به معادله ناویر استوکس معروف است.

نکته: سیال نیوتونی سیالی است که تنش برشی با آهنگ تغیر شکل زاویه‌ای (گرادیان سرعت) به طور مستقیم متناسب است. استفاده از معادلات فوق (معادلات ناویر استوکس) برای سیال غیرنیوتنی مانند خمیر دندان، عسل، قیر و غیره مجاز نمی‌باشد.

برای سیال نیوتنی مقادیر تنش را می‌توان به کمک روابط زیر بیان‌کرد [۱]:

$$\sigma_{xx} = \mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}(\vec{\nabla}.\vec{V})\right) = 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{yy} = \mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}(\vec{\nabla}.\vec{V})\right) = 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\sigma_{xx} = \mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}(\vec{\nabla}.\vec{V})\right) = 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

در این روابط μ ویسکوزیته سیال می‌باشد. با اعمال روابط فوق در شکل کلی معادله بقای مومنتوم و اعمال قانون بقای جرم معادله بقای مومنتوم در سه جهت به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}(\vec{\nabla}.\vec{V})\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + s_x$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}(\vec{\nabla}.\vec{V})\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] + s_y$$

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{2}{3}(\vec{\nabla}.\vec{V})\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] + s_z$$

شکل برداری معادلات فوق به‌صورت زیر است:

معادله فوق را می‌توان ساده‌تر کرد. به عنوان مثال برای سیال با ویسکوزیته ثابت، در جریان تراکم ناپذیر ($\nabla.\vec{V} = 0$) معادله ناویر استوکس به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] + s_x$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] + s_y$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] + s_z$$

شکل برداری معادله بقای مومنتوم برای سیال نیوتنی با ویسکوزیته ثابت و در جریان تراکم ناپذیربه‌صورت زیر بیان کرد:

$\boldsymbol{\rho\frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{\nabla}p + \mu\nabla^2\vec{V} + \vec{s}}$	**(۲-۳)**

نکته: معادله فوق در حالتی برقرار است که:

1) **سیال نیوتنی باشد**
2) **جریان تراکم ناپذیر باشد**
3) **ویسکوزیته ثابت باشد**

نکته: برای سیال غیر لزج ($\mu = 0$) معادله بقای مومنتوم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$-\vec{\nabla}p + \vec{s} = \rho\frac{D\vec{V}}{Dt}$$

این معادله به معادله اویلر معروف است.

۲-۱۲-۳ معادله بقای انرژی

در دو بخش قبل به بررسی نحوه استخراج معادله بقای جرم و مومنتوم پرداخته شد. اکنون به محاسبه آخرین معادله برای محاسبه هر شش متغیر جریان نیاز پرداخته می‌شود. بدین منظور باید سهم تمام انرژی ورودی و خروجی به حجم کنترل را اعمال کرد. انرژی می‌تواند در شکل‌های زیر به حجم کنترل وارد و یا خارج شود.

- به شکل انتقال گرمای جابجایی به علت حرکت ذرات ورودی و خروجی به حجم کنترل.
- به شکل انتقال گرمای رسانایی ناشی از ارتعاشات مولکولی و اتمی ذرات سیال در ورود و یا خروج به حجم کنترل.
- به شکل انتقال گرمای تابشی.
- در قالب کار انجام شده توسط نیروهای مرزی شامل نیروهای برشی و نیروهای عمودی.
- به شکل گرمای تولیدی حجمی درون حجم کنترل به علت عواملی چون واکنش‌های شیمیایی و غیره.

- به شکل کار حجمی ایجاد شده توسط نیروهای حجمی، به عنوان مثال نیروهای الکتریکی یا نیروی جاذبه زمین و غیره.

استخراج معادله بقای انرژی در مقایسه با معادله بقای جرم و مومنتوم پیچیده‌تر است. بر اساس قانون بقای انرژی خالص انرژی ورودی به حجم کنترل برابر است با تغییر انرژی حجم کنترل. انرژی مخصوص حجم کنترل شامل انرژی داخلی، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل.

$$e = i + \frac{1}{2}|V|^2 + gz$$

در این رابطه $|V|$ اندازه سرعت است. با توجه به این که حجم کنترل ثابت است، تغییر انرژی پتاسیل حجم کنترل صفر است. بنابراین تغییر انرژی حجم کنترل برابر است با:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left[m\left(i + \frac{1}{2}|V|^2\right)\right] = \frac{d}{dt}\left[\rho(dxdydz)\left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)\right]$$

هر جریان جرمی انرژی را به شکل انرژی جنبشی و درونی به همراه خواهد داشت. بنابراین نرخ انتقال گرمای جابجایی ورودی به حجم کنترل در جهت محور x برابر است با:

$$\dot{E}_{conv,x} = \dot{m}e_{in} = (\rho udydz)\left(i + \frac{1}{2}|V|^2\right) = (\rho udydz)\left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)$$

نرخ خالص انتقال گرمای جابجایی در جهت محور x برابر است با:

$$\dot{E}_{net,conv,x} = \dot{E}_{conv,x} - \left(\dot{E}_{conv,x} + \frac{\partial \dot{E}_{conv,x}}{\partial x}dx\right) = -\frac{\partial \dot{E}_{conv,x}}{\partial x}dx = -\frac{\partial \dot{E}_{conv,x}}{\partial x}dx$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho udydz)\left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)\right]dx$$

$$\dot{E}_{net,conv,x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho u)\left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)\right](dxdydz)$$

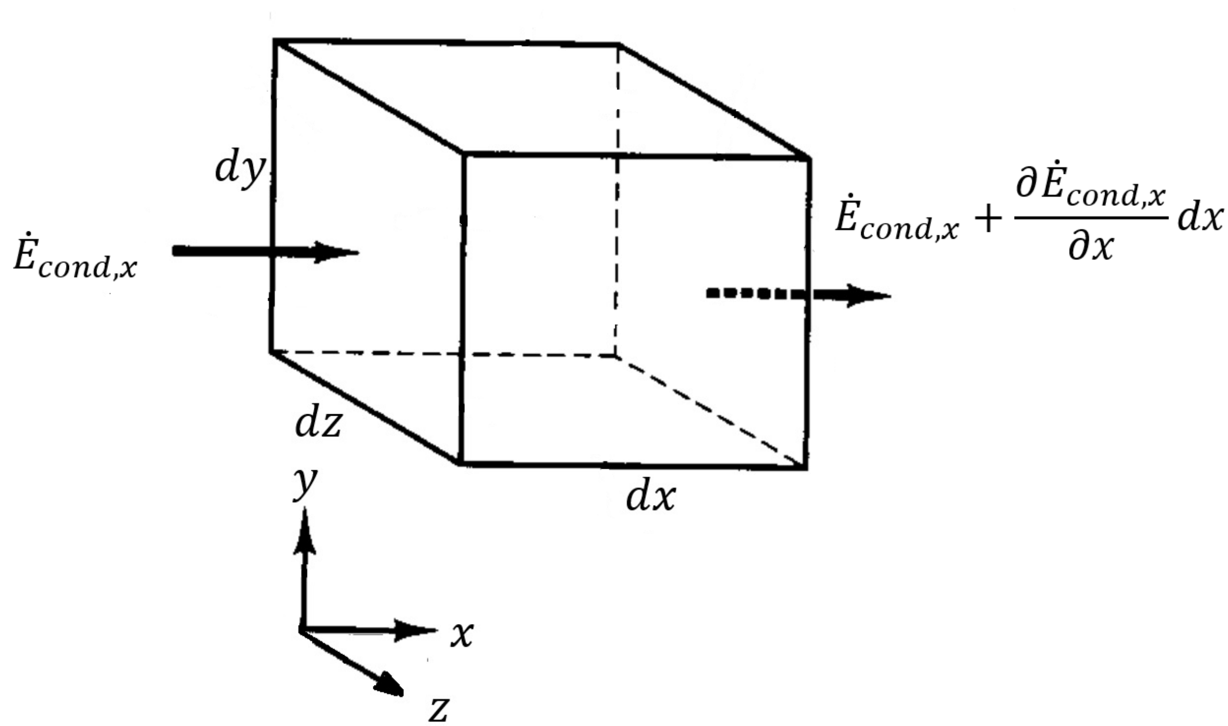
به‌طور مشابه در جهت y و z نرخ خالص انرژی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{E}_{net,conv,y} = -\frac{\partial}{\partial y}\left[(\rho v)\left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)\right](dxdydz)$$

$$\dot{E}_{net,conv,z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left[(\rho w)\left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)\right](dxdydz)$$

نرخ خالص انتقال گرمای جابجایی به‌صورت مجموع سه رابطه فوق به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{E}_{net,conv} = \dot{E}_{net,conv,x} + \dot{E}_{net,conv,y} + \dot{E}_{net,conv,z}$$
$$= -\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(\rho u)\left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\rho v)\left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[(\rho w)\left(i + \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2)\right)\right]\right\}(dxdydz)$$



شکل ۲- ۳ شار گرمایی هدایتی در جهت محور x

نرخ انتقال گرمای هدایتی در جهت محور x به کمک قانون فوریه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{E}_{cond,x} = -k(dydz)\frac{\partial T}{\partial x}$$

در این رابطه k ضریب هدایت گرمایی است. در نتیجه نرخ انتقال گرمای هدایتی در جهت محور x برای المان نشان داده شده در شکل ۲- ۳ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{E}_{net,cond,x} = \dot{E}_{cond,x} - \left(\dot{E}_{cond,x} + \frac{\partial \dot{E}_{cond,x}}{\partial x} dx\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(dydz)\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx$$

$$\dot{E}_{net,cond,x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)(dxdydz)$$

به طور مشابه نرخ انتقال گرمای هدایتی در جهت محور y و z به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{E}_{net,cond,y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)(dxdydz)$$

$$\dot{E}_{net,cond,z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)(dxdydz)$$

بنابراین نرخ انتقال گرمای هدایتی خالص برابر است با:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{net,cond} &= \dot{E}_{net,cond,x} + \dot{E}_{net,cond,y} + \dot{E}_{net,cond,z} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right](dxdydz)\end{aligned}$$

نرخ کار نیروهایی سطحی به‌صورت حاصل‌ضرب نیرو $(\sigma dA, \tau dA, pdA)$ در مولفه سرعت سیال در جهت نیرو تعیین می‌شود. به عنوان مثال نرخ کار نیروی حاصل از نیروی فشاری در جهت x به‌صورت زیر است:

$$\dot{W}_{p,x} = (pdydz)u$$

در نتیجه نرخ خالص کار نیروی فشاری در جهت x به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{W}_{net,p,x} = \dot{W}_{p,x} - \left(\dot{W}_{p,x} + \frac{\partial \dot{W}_{p,x}}{\partial x} dx\right) = -\frac{\partial \dot{W}_{p,x}}{\partial x} dx = -\frac{\partial}{\partial x}[(pdydz)u]dx$$

$$\dot{W}_{net,p,x} = -\frac{\partial (pu)}{\partial x}(dxdydz)$$

در نتیجه نرخ خالص کار نیروی فشاری در جهت y و z به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\dot{W}_{net,p,y} = -\frac{\partial (pv)}{\partial y}(dxdydz)$$

$$\dot{W}_{net,p,z} = -\frac{\partial(pw)}{\partial z}(dxdydz)$$

در نتیجه نرخ خالص نیروی فشاری به‌صورت جمع سه رابطه بالا محاسبه می‌شود:

$$\dot{W}_{net,p} = -\left[\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z}\right](dxdydz)$$

به‌طور مشابه سهم نرخ خالص کار سایر نیروهای سطحی محاسبه می‌شود. بنابراین نرخ کار نیروهایی سطحی برابر است با:

$$\begin{aligned}\dot{W}_{s,net} &= \dot{W}_{net,p} + \dot{W}_{net,\sigma} + \dot{W}_{net,\tau} \\ &= \left\{-\left[\frac{\partial(pu)}{\partial x} + \frac{\partial(pv)}{\partial y} + \frac{\partial(pw)}{\partial z}\right] + \left[\frac{\partial(\sigma_{xx}u)}{\partial x} + \frac{\partial(\sigma_{yy}v)}{\partial y} + \frac{\partial(\sigma_{zz}w)}{\partial z}\right]\right. \\ &\quad + \left[\frac{\partial(\tau_{yx}u)}{\partial y} + \frac{\partial(\tau_{yx}v)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{zx}u)}{\partial z} + \frac{\partial(\tau_{xz}w)}{\partial x} + \frac{\partial(\tau_{yz}w)}{\partial y}\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{\partial(\tau_{zy}v)}{\partial z}\right]\right\}(dxdydz)\end{aligned}$$

نرخ کار نیروهای حجمی به‌صورت حاصل‌ضرب نیروی در مولفه سرعت سیال در جهت نیرو به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\dot{W}_{vol,net} = (s_x u + s_y v + s_z w)(dxdydz)$$

گرمای تولید شده درون حجم کنترل به‌صورت زیر بر حسب نرخ گرمای تولیدی در واحد حجم ($\dot{q}'''$) محاسبه می‌شود:

$$\dot{Q}_{gen} = \dot{q}'''(dxdydz)$$

قانون بقای انرژی برای حجم کنترل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{E}_{net,conv} + \dot{E}_{net,cond} + \dot{Q}_{gen} + \dot{W}_{vol,net} + \dot{W}_{s,net}$$

با اعمال معادلات بدست آمده در رابطه فوق و ساده سازی معادلات و استفاده از معادله بقای جرم شکل کلی معادله بقای انرژی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho\left(\frac{\partial i}{\partial t}+u\frac{\partial i}{\partial x}+v\frac{\partial i}{\partial y}+w\frac{\partial i}{\partial z}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right)-p\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\dot{q}'''$$
$$+\left(s_x u+s_y v+s_z w\right)+\mu\phi$$

در حضور تابش گرمایی معادله فوق را می‌توان به‌صورت زیر اصلاح و بازنویسی کرد:

$$\rho\frac{Di}{Dt}=\nabla.(k\nabla T)-\nabla.\dot{q}''_{rad}-p(\nabla.V)+\dot{q}'''+s.V+\mu\phi \qquad (۴-۲)$$

معادله فوق شکل کلی معادله بقای انرژی است. برای تعیین ترم تابش گرمایی می‌بایست از مدل‌های کمکی استفاده کرد. مدل‌های مانند مدل راسلند[1]، مدل پی ۱، مدل سطح به سطح[2]، مدل دسته بندی گسسته[3] و مدل انتقال گسسته[4] برای تعیین این ترم استفاده می‌شوند. **در این رابطه $\mu\phi$ ترم اتلافات ویسکوزیته می‌باشد. این اصطلاحات تأثیر اصطکاک سیال و در نتیجه از دست دادن انرژی به دلیل اصطکاک داخلی را با بیان می‌کند.** ترم اتلافات ویسکوزیته به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mu\phi=\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}+\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y}+\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}+\sigma_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}+\tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x}+\tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z}+\sigma_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}+\tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}+\tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}$$

ترم اتلافات ویسکوزیته برای سیال نیوتنی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mu\phi=2\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2$$
$$+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

نکته: از ترم اتلافات ویسکوزیته اغلب می‌توان در جریان با عدد رینولدز بالا (جریان متلاطم) که در آن اثرات ویسکوزیته در مقایسه با اثرات اینرسی ناچیز است، صرف‌نظر کرد. حتی در جریان‌های آشفته

---

[1] Rosseland
[2] Surface to Surface (S2S)
[3] Discrete Ordinates (DO)
[4] Discrete Transfer (DTRM)

در شرایط خاص مانند نقاط نزدیک به دیوار ممکن است اثرات ویسکوزیته تاثیرگذار باشد و باید مد نظر قرار گیرد. در جریان‌های آرام، به ویژه در میکروکانال‌ها، اتلاف ویسکوزیته می‌تواند تأثیر قابل توجهی بر رفتار پروفیل سرعت و دما داشته باشد. در این حالت، اتلاف حرارتی ناشی از ویسکوزیته باید در نظر گرفته شود تا نتایج دقیق‌تری به‌دست آید.

آنتاپی به عنوان یک خاصیت ترمودینامیکی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h = i + \frac{p}{\rho}$$

که

$$\frac{Di}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt}$$

با جای‌گذاری رابطه فوق در شکل کلی معادله بقای انرژی، معادله بقای انرژی به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \nabla.(k\nabla T) - \nabla.\dot{q}''_{rad} - \frac{p}{\rho}\left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla.V)\right] + \frac{Dp}{Dt} + \dot{q}''' + s.V + \mu\phi$$

بر طبق قانون بقای انرژی

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla.V) = 0$$

در نتیجه معادله بقای انرژی بر حسب آنتالپی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \nabla.(k\nabla T) - \nabla.\dot{q}''_{rad} + \frac{Dp}{Dt} + \dot{q}''' + s.V + \mu\phi$$

در حالت کلی، تغییر در آنتالپی برای یک ماده تک فاز به‌صورت زیر بیان می‌شود[۲]:

$$dh = Tds + \frac{dp}{\rho}$$

رابطه فوق را می‌توان با استفاده از رابطه ماکسول و تعریف ضریب انبساط گرمایی (β) به‌صورت زیر نوشت:

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho}(1 - \beta T)dp$$

که

$$\beta = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_p$$

در نتیجه شکل کلی معادله بقای انرژی بر حسب دما به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla.(k\nabla T) - \nabla.\dot{q}''_{rad} + \beta T\frac{Dp}{Dt} + \dot{q}''' + s.V + \mu\phi \tag{۵-۲}$$

از آنجا که برای سیال تراکم ناپذیر $\beta = 0$ و $dh = cdT$ است، معادله بقای انرژی برای سیال تراکم ناپذیر به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho c \frac{DT}{Dt} = \nabla.(k\nabla T) - \nabla.\dot{q}''_{rad} + \dot{q}''' + s.V + \mu\phi$$

برای یک گاز ایدآل $\beta = 1/T$ و $dh = c_p dT$ است، معادله بقای انرژی برای گاز ایدآل به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla.(k\nabla T) - \nabla.\dot{q}''_{rad} + \frac{Dp}{Dt} + \dot{q}''' + s.V + \mu\phi$$

معادله بقای انرژی (معادله ۲-۵) را می‌توان برای حالت‌های خاص ساده ار کرد. به عنوان مثال معادله بقای انرژی برای یک جسم جامد (بدون جابجایی) و کدر (بدون تابش) با صرف‌نظر از تولید گرمای داخلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla.(k\nabla T)$$

در مختصات دکارتی در حالت دو بعدی معادله فوق به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

در شرایط پایا ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$) و با فرض ضریب هدایت گرمایی ثابت معادله فوق به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

نکته: معادله بقای جرم (معادله ۲-۳) و بقای مومنتوم (معادله ۲-۲) با هم کوپل هستند اما معادله بقای انرژی (معادله ۲-۵) مستقل از آن‌ها است. در واقع از حل معادلات بقای جرم و مومنتوم پروفیل سرعت و فشار تعیین می‌شود و با جایگذاری در معادله بقای انرژی توزیع دما تعیین می‌گردد. برای رفع

کوپلینگ بین فشار و سرعت در معادلات مومنتوم و پیوستگی، چندین الگوریتم مختلف وجود دارد که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به روش سیمپل[5]، سیمپل سی[۶] و پیزو[۷] اشاره کرد. در حالت‌های خاص به‌عنوان مثال زمانی که خواص (چگالی، ویسکوزیته و یا ظرفیت گرمایی) تابعی از دما باشند سه معادله بقای اجرم، مومنتوم و انرژی همزمان با هم کوپل خواهند بود.

۱. Schlichting, H. and K. Gersten, *Boundary-layer theory*. ۲۰۱۶: springer.

۲. Bejan, A., *Convection heat transfer*. ۲۰۱۳: John wiley & sons.

[5] SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations)

[6] SIMPLEC (SIMPLE Consistent)

[7] PISO (Pressure Implicit with Splitting of Operators)