برنامه‌ریزی و کنترل موجودی‌ها دکتر [illegible]

کنترل موجودی

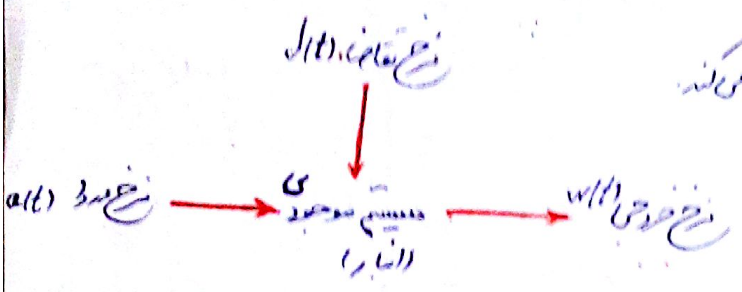
موجودی: [illegible]

ذخیره‌ای از مواد و کالا است که به صورت آماده یا نیمه‌تمام برای برآورده نمودن تقاضاها نگهداری می‌شود.

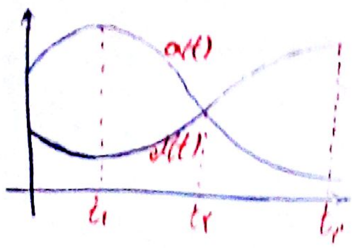
- دارایی‌ها (ماشین‌آلات، زمین، ساختمان و ...) ✗
- نفتی که در لوله در حال حرکت است ✗
- کالاهای انبار مواد اولیه ✓
- کالاهای انبار محصول نیمه‌ساخته ✓
- کالاهای انبار محصول نهایی ✓

کنترل موجودی:

بررسی و تعیین سطحی از موجودی که هزینه‌های سیستم موجودی را کمینه می‌کند.



$$w(t)=\begin{cases} d(t) & if \quad d(t) < a(t) \\ 0 & \\ a(t) & if \quad a(t) < d(t) \end{cases}$$



در کنترل موجودی کالا - دو سؤال کی و چقدر را پاسخ می‌دهیم

در t_2 بیشترین مقدار موجودی انبار را داریم زیرا تا قبل از آن مقدار ورودی بیشتر از مقدار خروجی انبار است و موجودی در حال افزایش است. بیشترین افزایش مقدار موجودی کار t_1 است.

L - LT: مدت زمان تحویل سفارش

فاصله زمانی بین لحظه سفارش و لحظه رسیدن سفارش (اولین قطعه سفارش) است.

- متغیرهای حالت:

متغیرهایی هستند که در هر لحظه حالت یا وضعیت سیستم موجودی را مشخص می‌کند.

$I(t)$: مقدار موجودی در دسترس در زمان t

$b(t)$: مقدار کمبود در زمان t (تقاضایی است که در زمان مقرر به آن پاسخ نداده‌ایم)

$NS(t)$: موجودی خالص در زمان t

$NS(t)=I(t)-b(t) \quad , \quad I(t).b(t)=0$

$O(t)$: مقدار سفارش در راه

$y(t)$: مقدار موقعیت موجودی

$y(t)=NS(t)+O(t)$

$y(t)=I(t)-b(t)+O(t)$

(I) هزینه تدارک مواد: کلیه هزینه‌ها از لحظه سفارش تا لحظه تحویل سفارش به انبار

هزینه تدارک مواد:

- هزینه ثابت سفارش دهی: به مقدار سفارش بستگی ندارد. (A)
- هزینه خرید: تمام هزینه‌ها از لحظه سفارش تا لحظه تحویل سفارش که قابل بیان برحسب واحد محصول باشد.

هزینه خرید هر واحد
↑
C . Q
تعداد محصول

هزینه بازرسی کالای سفارش داده شده جزء هزینه‌های تدارک مواد است اگر قابل بیان برحسب واحد کالا باشد جزء هزینه‌های خرید است و در غیر این صورت جزء هزینه‌های ثابت سفارش دهی است.

مدل‌ها معمولاً از نظر نحوه دریافت سفارش

$$P = \text{نرخ دریافت سفارش} = \frac{\text{مقدار سفارش}}{\text{فاصله زمانی بین اولین تا آخرین قطعه}} = \frac{Q}{t_p} \Rightarrow \begin{cases} \text{if } P=\infty \longrightarrow \text{مدل خرید} \\ \text{if } P<\infty \longrightarrow \text{مدل تولید} \end{cases}$$

مدل خرید: مدل‌های هستند که سفارش یکجا دریافت می‌شود یعنی نرخ دریافت سفارش بینهایت است.

مدل تولید: مدل‌های هستند که تمام سفارش به تدریج دریافت می‌شود یعنی نرخ دریافت سفارش یک عدد است

مدل تولید
- هزینه‌های آماده‌سازی ← هزینه ثابت سفارش‌دهی
- هزینه تولید ← هزینه خرید

مثال: کدام یک از موارد زیر جزء هزینه‌های آماده‌سازی نیست؟

۱. هزینه عملیات مواد ← مثال‌ها این بر حسب واحد محصول هست پس جزء هزینه‌های آماده‌سازی نیست.

۲. هزینه عملیات اولیه تولید ← مربوط به خرابی دستگاه و لوازم آن می‌باشد و ربطی به واحد محصول ندارد پس جزء هزینه آماده‌سازی است

۳. هزینه راندمان پایین ابتدای تولید ← جزو هزینه آماده‌سازی است.

۴. هزینه راندمان پایین تولید ← جزو هزینه آماده‌سازی نیست

۵. هزینه مواد اولیه ← جزو هزینه خرید

② هزینه نگهداری

$$\underset{\frac{\text{تومان}}{\text{عدد . زمان}}}{h} = \underbrace{\overset{\frac{\text{تومان}}{\text{عدد}}}{\underset{\frac{1}{\text{واحد زمان}}}{i}C}}_{\text{به قیمت کالا بستگی دارد}} + \underbrace{\overset{\frac{\text{تومان}}{\text{عدد . زمان}}}{W}}_{\text{به قیمت کالا بستگی ندارد}}$$

W: هزینه نگهداری که به قیمت کالا بستگی ندارد ولی بر حسب واحد محصول است.

۱. هزینه تسهیلات انبار (اجاره انبار/آب/برق)

۲. هزینه حمل و نقل داخل انبار

۳. هزینه افت یا از بین رفتن

۴. هزینه متروک شدن یا از مد افتادن

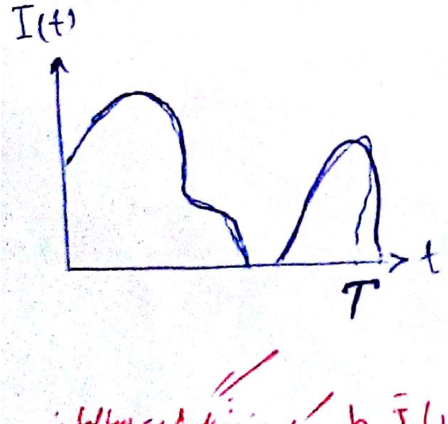
۵. هزینه بیمه و مالیات

۶. هزینه سرمایه درگیر در موجودی

I_{max} بیشینه موجودی

h_2 هزینه نگهداری بر حسب بیشینه موجودی

محاسبه کل هزینه نگهداری از ۰ تا T



$$h \sum_{T} I(t)$$
$$h \int^{T} I(t)dt$$
$$h\bar{I}T = H$$

هزینه اجاره انبار در بیشتر مسائل بر اساس متوسط موجودی است ولی در حالت خاص اگر مسأله بیان می‌کند می‌تواند بر حسب بیشینه موجودی باشد.

$$\text{کل هزینه نگهداری سالیانه} = \underbrace{h_1 \bar{I}(1)}_{\text{هزینه نگهداری بر حسب متوسط موجودی}} + \underbrace{h_2 I_{max}}_{\text{هزینه نگهداری وابسته به بیشینه موجودی}}$$

مثال: کل هزینه نگهداری یک انبار کولر طی ۶ ماه در صورتیکه متوسط کولرها در ۶ ماه برابر ۵۰ عدد باشد و هزینه نگهداری سالیانه هر واحد از آن ۴۰۰۰۰ تومان چقدر خواهد بود.

$T=\frac{1}{۲}$ سال

$\bar{I}=۵۰$

$h=۴۰۰۰۰$

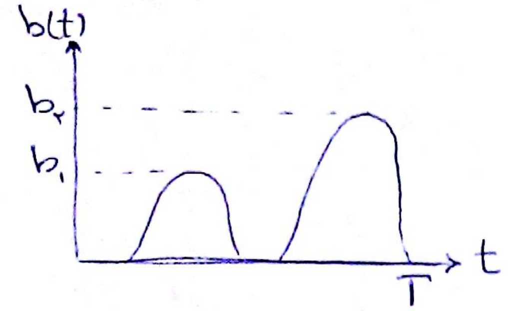
$H=h\bar{I}T=۴۰۰۰۰\times۵۰\times\frac{1}{۲}=$

Ⓘⓘⓘ هزینه کمبود

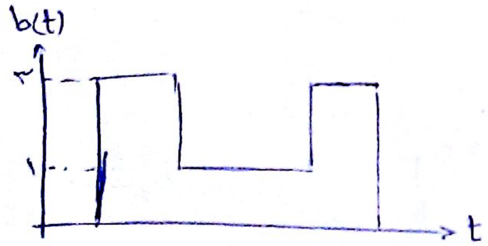
انواع جریمه‌ها کمبود:
- وابسته به زمان $\hat{\pi}=\frac{\text{تومان}}{\text{عدد . واحد زمان}}$
- مستقل از زمان $\pi=\frac{\text{تومان}}{\text{عدد}}$

انواع حالات کمبود:
- ۱) مجاز نیست $\pi=\infty$ ، $\hat{\pi}=\infty$
- ۲) مجاز است
  - I فروش از دست رفته $\pi=cte$ ، $\hat{\pi}=۰$
  - II پس‌افت $\pi=cte$ ، $\hat{\pi}=cte$

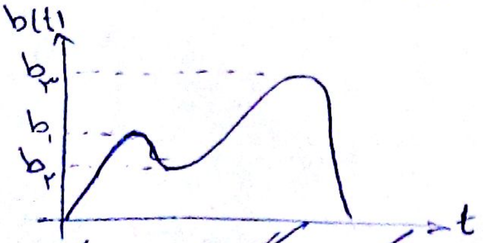
نحوه محاسبه کل هزینه کمبود از ۰ تا T



$$\text{کل هزینه کمبود از ۰ تا T}=\hat{\pi}\underbrace{\int_0^T b(t)dt}_{\bar{b}T}+\pi(b_1+b_2)$$



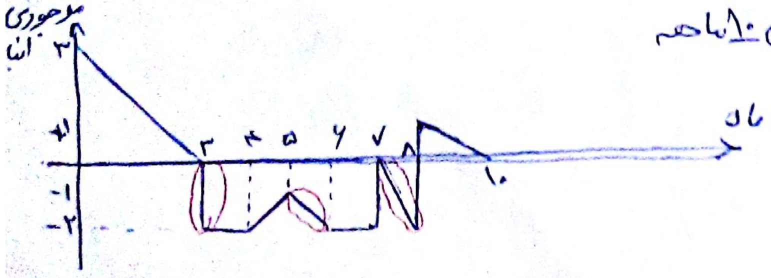
تعداد کمبودهایی که در طی این دوره مواجه شدیم ۳+۲=۵



میزان اصلی

تعداد کمبودها مواجه شده در طی دوره $b_1+b_3-b_2$

مثال: نمودار موجودی خالص یک محصول طی ۱۰ ماه گذشته به صورت شکل زیر است. در صورتیکه هزینه نگهداری هر واحد کالا در سال برابر ۶۰ تومان، هزینه هر تقاضایی که در زمان مقرر برآورده نشود ۲۰ تومان و هزینه هر واحد کمبود در ماه برابر ۱۰ تومان باشد، موارد زیر را محاسبه کنید. الف- کل هزینه نگهداری ۱۰ ماهه ب- کل هزینه کمبود ۱۰ ماهه ج- متوسط موجودی در دست ۱۰ ماهه د- متوسط کمبود ۱۰ ماهه هـ- متوسط موجودی خالص ۱۰ ماهه



الف) $H = h\int_{0}^{7} I(t)dt = (\frac{۳\times۳}{۲} + \frac{۲\times۱}{۲})\times ۵ = \frac{۵۵}{۲}$

$h = ۵$

ب) $B = \pi\int_{۳}^{۸} b(t)dt + \pi(۲+۱\times۲) = ۱۰((۳$ [illegible] $\times ۴ - ۱) + \frac{۱\times۲}{۲}) + ۲۰(۵) = ۸۰ + ۱۰۰ = ۱۸۰$

ج) $\bar{I} = \frac{۱۱/۲}{۱۰} = \frac{۱۱}{۲۰}$ د) $\bar{b} = \frac{\int_{۳}^{۸} b(t)dt}{۱۰} = ۰/۸$

ه) $\bar{NS} = \bar{I} - \bar{b} = \frac{۱۱}{۲۰} - \frac{۱۶}{۲۰} = -۰/۲۵$

- عوامل یا فاکتورهای موثر در مدل‌های موجودی

- ۱- تقاضا
  - قطعی
    - ساکن
    - پویا
  - احتمالی
    - ساکن
    - پویا
- ۲- حالات کمبود
  - جایز نیست
  - جایز است
    - فروش از دست رفته
    - پس افت
- ۳- محدودیت
  - وجود ندارد
  - وجود دارد
    - فضای انبار
    - تعداد دفعات سفارش
    - سرمایه درگیر در موجودی
- ۴- مدت زمان تحویل سفارش
  - قطعی
  - احتمالی
- ۵- نحوه دریافت سفارش
  - یکجا
  - تدریجی
- ۶- قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی
  - ثابت
  - متغیر
- ۷- نوع برنامه‌ریزی
  - تک محصولی
  - چند محصولی

مدل قطعی / ساده / ویلسون / EOQ / مقدار اقتصادی سفارش

فرضیات مدل:

۱- تقاضا قطعی و ساکن
۲- کمبود جایز نیست
۳- محدودیت وجود ندارد
۴- مدت زمان تحویل سفارش قطعی است
۵- سفارش یکجا دریافت می‌شود
۶- قیمت کالا در طول مدت برنامه‌ریزی ثابت است.
۷- مدل تک محصولی است.

هدف مدل: کمینه کردن هزینه‌های سالیانه سیستم موجودی (مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش دهی) با محاسبه مقدار سفارش بهینه $EOQ = Q^* = QW$ و نقطه سفارش بهینه (r^* و r_h^*)

EOQ = Economic order quantity

r_h^*: inhand

r^*: reorder point

r^*: نقطه سفارش بهینه برحسب موقعیت موجودی

r_h^*: 〃 〃 〃 〃 موجودی خالص

پارامترها:

L ← مدت زمان تحویل سفارش   D ← تقاضا   c ← قیمت

$\pi, \hat{\pi}$ P   h

متغیرها:

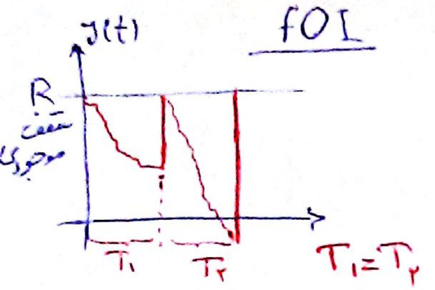
r^*, r^*_h $Q_w = Q^*$ T^*: فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی

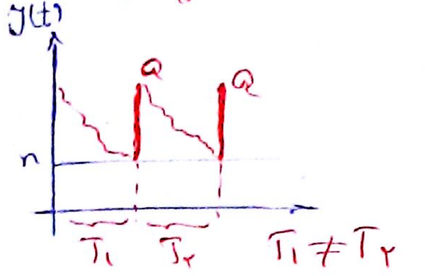
خط مشی های سفارش دهی:

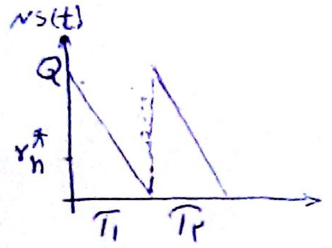
fixed order size: FOS (مرور دائم) (r^*, Q^*) { هزینه کمبود کمتر / هزینه نگهداری کمتر

fixed order Interval: FOI R^*, T^*

- هزینه سفارش دهی کمتر
- هزینه حمل و نقل کمتر
- اصولاً با سفارش همزمان کالاها مواجهیم







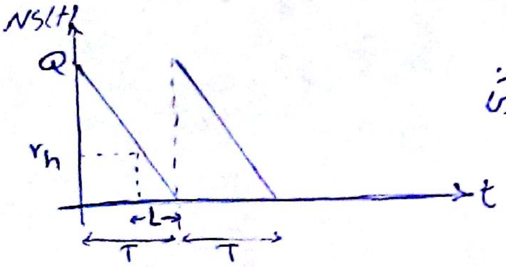
مدل EOQ یک سیستم FOS می باشد چون متغیرهای تصمیم آن r و Q می باشند.

در مدل EOQ شیب خط ثابت می باشد لذا طول دوره ها برابر می باشد. لذا در حین اینکه مدل FOS است طول دوره ها نیز برابر است $T_1=T_2$

هزینه یک دوره

هزینه یک دوره = هزینه تدارک + هزینه نگهداری + هزینه کمبود

هزینه یک دوره = $CQ + A + h\frac{QT}{۲} + ۰$



متوسط تعداد دفعات سفارش در سال $= n = \frac{1}{T}$

$T = ۲$ ماه $\Rightarrow T = \frac{1}{۶}$ سال

} $n = \frac{1}{1/۶} = ۶$

$n = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$

متوسط هزینه سالیانه = هزینه یک دوره × متوسط تعداد دوره ها در سال

〃 〃 〃 $= A\frac{D}{Q} + CD + h\frac{Q}{۲}$

$$K(Q) = A\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{۲}$$

$$\frac{dK(Q)}{dQ} = ۰ \Rightarrow \boxed{Q^* = Q_w = EOQ = \sqrt{\frac{۲DA}{h}}}$$

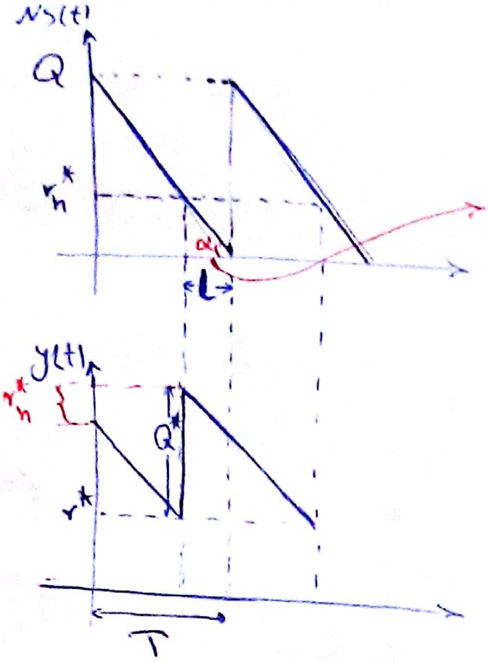
$$\boxed{K(Q) = \sqrt{۲DAh}} = A\frac{D}{Q^*} + h\frac{Q^*}{۲}$$

$$\boxed{T^* = \frac{Q^*}{D}}$$

نکته: مقدار به دست آمده برای هزینه‌های سالیانه، متوسط هزینه یک سال است و در صورتیکه در مسأله بخواهند هزینه یک سال خاص محاسبه شود باید به کمک شکل هزینه دقیق هر سال را محاسبه کرد.

- محاسبه r^* و r_h^*

if $L<T$ ①



$$tg\alpha = D = \frac{r_h^*}{L} \Rightarrow r_h^* = DL$$

$$r^* = r_h^* = DL$$

if $L>T$ ②

$$\boxed{m = \left[\frac{L}{T}\right]}$$

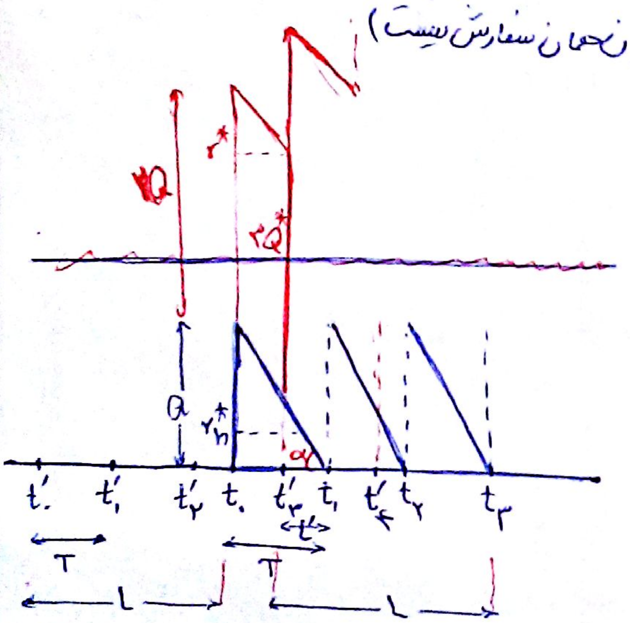
$$\boxed{L' = L - mT}$$

$L = 2.6T$

$m = ۲$

$L' = 0.6T$

L': فاصله بین لحظه سفارش تا لحظه رسیدن یک سفارش (لزوماً منظور رسیدن همان سفارش نیست)



$$r^* = r_h^* + ۲Q^* = r_h^* + mQ^* = DL - mQ^* + mQ^* = DL$$

$$tg\alpha = D = \frac{r_h^*}{L'} \Rightarrow r_h^* = DL' = D(L-mT)$$
$$= DL - m\overbrace{DT}^{Q^*} = DL - mQ^*$$

- نکات مدل EOQ

۱- در زمان یک دوره، زمان‌های قبل از زمان سفارش، مقدار سفارش در راه برابر mQ^* و بعد از لحظه سفارش مقدار سفارش در راه برابر $(m+1)Q^*$ است. مقدار سفارش در راه به طور متوسط برابر DL است.

	احتمال رخداد
$(m+1)Q^*$	$\frac{L'}{T}$
mQ^*	$\frac{T-L'}{T}$

$$E(x) = (m+1)Q^*\frac{L'}{T} + mQ^*\frac{T-L'}{T} = DL$$

$$\text{تعداد محموله‌ها در راه به طور متوسط} = \frac{DL}{Q^*} = \frac{DL}{DT^*} = \frac{L}{T^*}$$

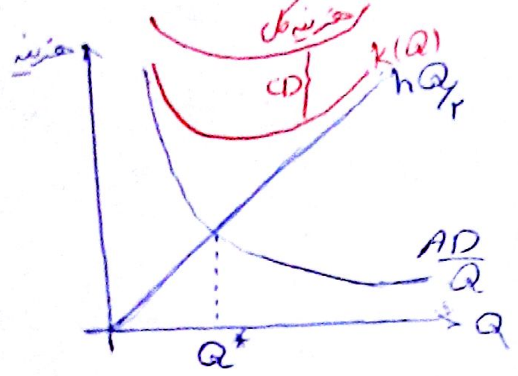
۲- $r^* \le y(t) \le r^* + Q^*$

$I(t) \ge ۰$

$۰ \le NS(t) \le Q^*$

$r_h^* = ۰ \quad \text{if} \quad L = mT, L' = ۰ \quad \Leftarrow ۰ \le r_h^* \le Q^*$

۳-



۴- محل تلاقی منحنی هزینه های نگهداری سالیانه و سفارش دهی سالیانه در مدل EOQ نقطه بهینه است. یعنی در نقطه بهینه این دو هزینه برابرند.

$$k(Q^*) = ۲A\frac{D}{Q^*} = ۲nA = \frac{۲A}{T^*} = hQ^*$$

مثال: اگر در یک مدل ساده هزینه هر بار سفارش دهی ۵۰۰ تومان باشد و فاصله بین دو سفارش متوالی دو ماه محاسبه شده باشد در اینصورت کل هزینه نگهداری بهینه سالیانه چقدر است؟

هزینه نگهداری $= h\frac{Q^*}{۲} = \frac{k(Q^*)}{۲} = \frac{۲A}{۲T^*} = \frac{۵۰۰}{۱/۶} = ۳۰۰۰$

۵-

$Q > Q^* \qquad h\frac{Q}{۲} > A\frac{D}{Q}$

$Q = Q^* \qquad h\frac{Q}{۲} = A\frac{D}{Q}$

$Q < Q^* \qquad h\frac{Q}{۲} < A\frac{D}{Q}$

مثال: در یک مدل ساده یک بار ۲ برابر مقدار سفارش بهینه؛ بار دیگر نصف مقدار سفارش بهینه سفارش می‌دهیم در اینصورت کل هزینه متغیر سالیانه و همچنین کل هزینه سالیانه چند درصد تغییر می‌کند؟

حل

۶-

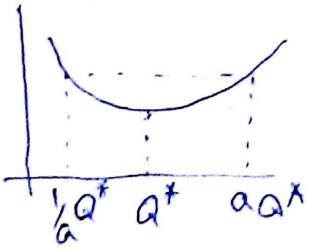
$$\frac{k(Q)}{k(Q^*)} = \frac{h\frac{Q}{۲} + A\frac{D}{Q}}{kQ^*} = \frac{hQ/۲}{\underbrace{k(Q^*)}_{hQ^*}} + \frac{AD/Q}{\underbrace{k(Q^*)}_{۲AD/Q^*}} = \frac{۱}{۲}\frac{Q}{Q^*} + \frac{۱}{۲}\frac{Q^*}{Q} = \boxed{\frac{۱}{۲}\left(\frac{Q}{Q^*} + \frac{Q^*}{Q}\right) = \frac{k(Q)}{k(Q^*)}}$$

$$\frac{k(Q)}{k(Q^*)} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۲Q^*}{Q^*} + \frac{Q^*}{۲Q^*}\right) = \frac{۱}{۲}\left(۲ + \frac{۱}{۲}\right) = ۱,۲۵ \quad , \quad \frac{k(Q)}{k(Q^*)} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\frac{Q^*}{۲}}{Q^*} + \frac{Q^*}{\frac{Q^*}{۲}}\right) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{۲} + ۲\right) = ۱,۲۵$$

$$\boxed{K(Q = aQ^*) = k\left(Q = \frac{۱}{a}Q^*\right)}$$

$$۱ \le \frac{k(Q) + CD}{k(Q^*) + CD} \le \frac{k(Q)}{k(Q^*)}$$

۷-

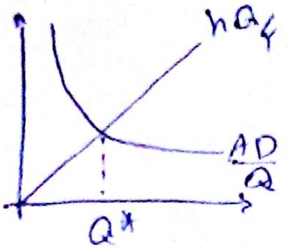


$k(Q = Q^* + a) < k(Q = Q^* - a)$

شیب منحنی هزینه ها در نزدیکی نقطه بهینه نسبتاً ملایم است. در سمت راست نقطه بهینه نسبت به سمت چپ آن شیب ملایم تر است.

④

۸- شیب منحنی هزینه های سفارش دهی و نگهداری سالیانه در نقطه بهینه به ترتیب $-\frac{h}{۲}$ و $\frac{h}{۲}$ است.



سفارش دهی: $-\frac{AD}{Q^۲} \xrightarrow{Q=Q^*} -\frac{AD}{Q^{*۲}} \xrightarrow{Q^{*۲}=\frac{۲DA}{h}} -h/۲$

نگهداری: $h\frac{Q}{۲}=\frac{h}{۲}$

۹- تحلیل حساسیت پارامترهای مدل

$Q=\sqrt{\frac{۲DA}{h}}$

$K(Q)=\sqrt{۲DAh}$

$h=ic+w$

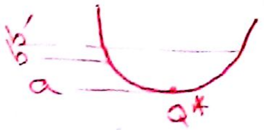
	Q^*	$K(Q^*)$
A ↑	↑	↑
D ↑	↑	↑
h ↑	↓	↑
L ↑	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند
i ↑	↓	↑
c ↑	↓	↑

مثال: اگر هزینه نگهداری سالیانه هر واحد ۴ تومان باشد ولی در محاسبه مقدار سفارش اقتصادی به جای ۴ عدد ۱ جایگزین شده است. در اینصورت مجموع هزینه های نگهداری و سفارش دهی سالیانه چند درصد افزایش یا کاهش می یابد.

$Q=\sqrt{\frac{۲DA}{h}}=\sqrt{\frac{۲DA}{۱}}$

$Q^*=\sqrt{\frac{۲DA}{h}}=\sqrt{\frac{۲DA}{۴}}$

$\frac{Q}{Q^*}=۲ \Rightarrow \frac{k(Q)}{k(Q^*)}=\frac{۱}{۲}(۲+\frac{۱}{۲})=۱٫۲۵$



درصورتیکه در محاسبه مقدار سفارش اقتصادی به جای پارامترهای مدل به اشتباه یا از روی تخمین عدد دیگری جایگزین شود در اینصورت مقدار سفارش بدست آمده نا بهینه بوده و افزایش می یابد برای محاسبه نسبت افزایش هزینه متغیر ابتدا نسبت $\frac{Q}{Q^*}$ را حساب می کنیم و در فرمول $\frac{k(Q)}{k(Q^*)}=\frac{۱}{۲}(\frac{Q}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q})$ قرار می دهیم.

- درصورتیکه عنوان شود قسمتی از هزینه نگهداری بر حسب واحد محصول نیست در اینصورت این هزینه قسمتی از h و w نیست و تاثیری بر مقدار سفارش بهینه ندارد.

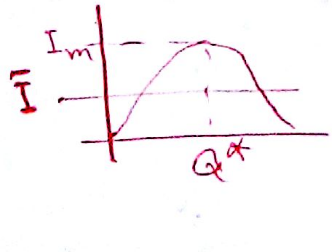
کل هزینه سالیانه $= A\frac{D}{Q}+h\frac{Q}{۲}+CD+a$

- اگر $h_۱$ هزینه نگهداری سالیانه هر واحد کالا بر حسب متوسط موجودی و $h_۲$ هزینه نگهداری سالیانه هر واحد کالا بر حسب بیشینه موجودی باشد در تمامی فرمول های مدل به جای h مقدار $h_۱+۲h_۲$ جایگزین می شود.

$h_۱\bar{I}+h_۲I_m$

$h_۱\frac{Q}{۲}+h_۲Q)+A\frac{D}{Q}+CD$

$(h_۱+۲h_۲)\frac{Q'}{۲}+A\frac{D}{Q}+CD$



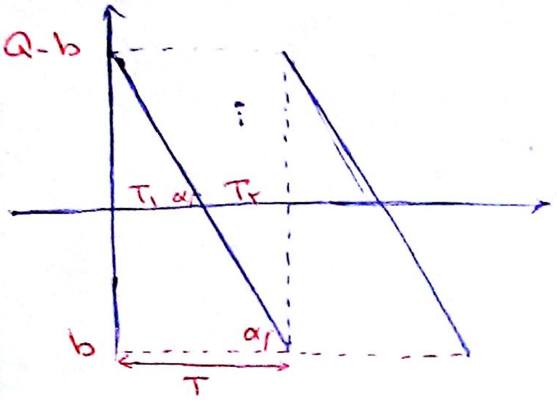
مدل کمبود تقاضای پس افت:

فرضیات مدل: مانند مدل EOQ با این تفاوت که کمبود مجاز است و حتماً جبران می‌شود.

هدف مدل: کمینه کردن هزینه کل با انتخاب مناسب Q^*، b^*، r^*، r_h^*

هزینه کل = سفارش دهی + خرید + نگهداری + کمبود

هزینه کل در این مدل کوچکتر یا مساوی مدل EOQ است. چون محدودیت کمبود در اینجا اضافه شده پس نمی‌تواند هزینه آن بیشتر باشد.



$$tg\alpha = \frac{Q}{T} \Rightarrow D = \frac{Q}{T} \Rightarrow \boxed{T = \frac{Q}{D}}$$

$$tg\alpha = D = \frac{Q-b}{T_1} \Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{Q-b}{D}}$$

$$tg\alpha = D = \frac{b}{T_2} \Rightarrow \boxed{T_2 = \frac{b}{D}}$$

$$n = \frac{1}{T} = \frac{D}{Q}$$

$$\underset{(\text{یک سال})}{\int I\,dt} = \frac{(Q-b)T_1}{2T} = \frac{(Q-b)(Q-b)}{2TD} = \frac{(Q-b)^2}{2TD} = \frac{(Q-b)^2}{2Q}$$

هزینه نگهداری سالیانه $= h\int I\,dt = h\,\boxed{\frac{(Q-b)^2}{2Q}}$

$$\text{یک سال}\int b\,dt = \frac{bT_2}{2T} = \frac{b\,\frac{b}{D}}{2\,\frac{Q}{D}} = \boxed{\frac{b^2}{2Q}}$$

هزینه کمبود سالیانه $= \frac{\hat{\pi} b^2}{2Q} + \frac{\pi b}{T} = \boxed{\frac{\pi b^2}{2Q} + \frac{\pi b D}{Q}}$

کل هزینه‌ی سالیانه = خرید + سفارش دهی + نگهداری + کمبود

$$= CD + A\frac{D}{Q} + h\frac{(Q-b)^2}{2Q} + \frac{\hat{\pi} b^2}{2Q} + \pi\frac{bD}{Q}$$

$$\frac{dk(Q,b)}{dQ} = 0 \Rightarrow \boxed{Q^* = \sqrt{\frac{2DA}{h} - \frac{(\pi D)^2}{h(\hat{\pi}+h)}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}}$$

$$\frac{dk(Q,b)}{db} = 0 \Rightarrow \boxed{b^* = \frac{hQ^* - \pi D}{\hat{\pi}+h}}$$

حالت خاص I ($\pi = cte$ ، $\hat{\pi} = 0$)

$\frac{\partial k}{\partial b} = 0$ ، در $\frac{\partial k}{\partial Q} = 0$ بدست آمده از Q جایگذاری $\Rightarrow \hat{\pi}(\hat{\pi}+h)b^2 + 2\pi\hat{\pi}Db + (\pi D)^2 - 2DAh = 0$

if $\hat{\pi}=۰ \Rightarrow (\pi D)^۲-۲DAh=۰ \Rightarrow$ ⇐ هیچ جوابی برای b در بازه ۰ تا ∞ نداریم

$$\Rightarrow \begin{cases} b=۰ \Rightarrow k(Q^*)=\sqrt{۲DAh} \\ b=\infty \Rightarrow k(Q^*)=\pi D \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi D \geq \sqrt{۲DAh} \Rightarrow Q^*=Q_w / b^*=۰ / k(Q^*)=k_w \\ \pi D < \sqrt{۲DAh} \Rightarrow b^*=\infty / k(Q^*)=\pi D \end{cases}$$

حالت خاص II ($\pi=۰$, $\hat{\pi}=cte$)

$$Q^*=\sqrt{\frac{۲DA}{h}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \qquad b^*=\frac{hQ^*}{\hat{\pi}+h}=\frac{\sqrt{۲DAh}}{\sqrt{\hat{\pi}(\hat{\pi}+h)}}$$

$$I_{max}=Q^*-b^*=\sqrt{\frac{۲DA}{h}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}=Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

$$k(Q^*)=\sqrt{۲DAh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

$$r^*=DL-b^* \qquad r_h^*=DL-mQ^*-b^* \qquad -b^*\leq r_h^*\leq Q^*-b^*$$

تحلیل حساسیت $\hat{\pi}$:

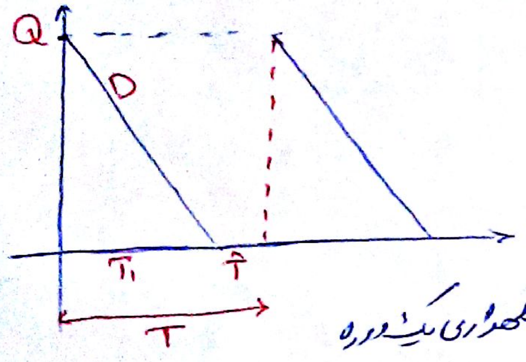
$\downarrow b^*$ ، $\uparrow I_{max}$ ، $\uparrow k(Q^*)$ ، $\downarrow Q^*$:$\uparrow\hat{\pi}$

مدل فروش از دست رفته:

فرضیات مدل: مانند مدل EOQ با این تفاوت که کمبود مجاز است و جبران نمی‌شود.

هدف مدل: مانند مدل پس افت با این تفاوت که به جای b^*، $\hat{T}^*$ محاسبه می‌شود.

$\hat{T}^*$: مدت زمان کمبود یعنی عدم پاسخگویی به تقاضا در یک دوره



$$T_1=\frac{Q}{D} \qquad T=\frac{Q+D\hat{T}}{D}$$

$$n=\frac{1}{T}=\frac{D}{Q+D\hat{T}}$$

هزینه نگهداری یک دوره $=h\int^{T} I\,dt=h\frac{QT_1}{۲}=\frac{hQ^۲}{۲D}$

اسال D

، $\hat{T}$?

$\Rightarrow$ تقاضا در $\hat{T}$ $=D\hat{T} \Rightarrow$ هزینه کمبود در یک دوره $=\pi D\hat{T}$

هزینه یک دوره $=CQ+A+\frac{hQ^۲}{۲D}+\pi D\hat{T}$

متوسط هزینه سالیانه $=CQ\left(\frac{D}{Q+D\hat{T}}\right)+A\frac{D}{Q+D\hat{T}}+\frac{hQ^۲}{۲(Q+D\hat{T})}+\frac{\pi D^۲\hat{T}}{Q+D\hat{T}}$

$$\frac{dK(Q,\hat{T})}{d\hat{T}}=0 \Rightarrow -DA+hQ^2-\pi D^2\hat{T}+hQD\hat{T}=0$$

$$\frac{dK(Q,\hat{T})}{dQ}=0 \Rightarrow Q=\frac{\pi D}{h}\pm\sqrt{\frac{(\pi D)^2}{h^2}+\frac{2DA}{h}} \xrightarrow[\text{در معادله بالا}]{Q\text{ را جایگذاری}} D\hat{T}=\frac{-\pi D}{h}\pm\sqrt{\left(\frac{\pi D}{h}\right)^2-\frac{2DA}{h}}$$

$(\pi D)^2 \geq 2DAh \Longrightarrow$ $\hat{T}$ نمی‌تواند مقدار مثبت بگیرد $\begin{cases}\hat{T}=0\\ \hat{T}=+\infty\end{cases} \Rightarrow \boxed{\hat{T}^*=0\ ,\ Q^*=Q_w}$

$(\pi D)^2 < 2DAh \Longrightarrow$ زیرا رادیکال منفی $\begin{cases}\hat{T}=0\\ \hat{T}=+\infty\end{cases} \Rightarrow \boxed{\hat{T}^*=+\infty\ ,\ Q^*=0}$

مدل تولید ساده / EPQ (مقدار تولید اقتصادی)

فرضیات مدل: مانند مدل EOQ با این تفاوت که سفارش تدریجی دریافت می‌شود.

هدف مدل: مانند مدل EOQ

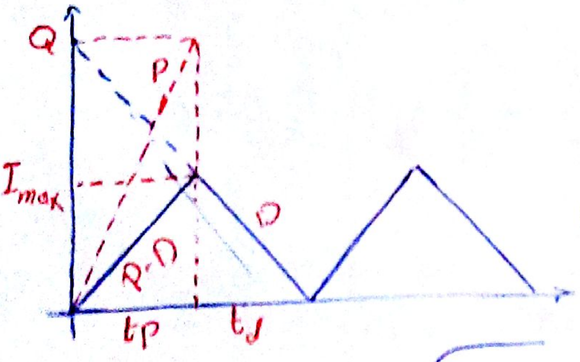
پارامترهای مدل: A: هزینه هر بار آماده سازی   P: نرخ دریافت سفارش = نرخ تولید

C: قیمت تمام شده یا متغیر هر واحد.

متغیرهای تصمیم: Q: مقدار هر بار تولید ، r ، r_h ، T: مدت زمان سیکل تولید

$T=\frac{Q}{D}$ $t_p=\frac{Q}{P}$ $T=t_p+t_d \Rightarrow t_d=\frac{Q}{D}-\frac{Q}{P} \Rightarrow t_d=\frac{Q}{D}\left(1-\frac{D}{P}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{t_d=T\left(1-\frac{D}{P}\right)}$$



$$\int_0^T I\,dt=\frac{I_{max}\times T}{2}=\frac{Q}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)T \Rightarrow$$

$$\text{هزینه نگهداری یک دوره}=h\frac{Q}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)T$$

$$\text{کل هزینه سالیانه}=CD+\frac{D}{Q}A+h\frac{Q}{2}\left(1-\frac{D}{P}\right)$$

$$\frac{dK(Q)}{dQ}=0 \Rightarrow Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h(1-\frac{D}{P})}} \Rightarrow \boxed{Q^*=\frac{Q_w}{\sqrt{1-D/P}}}$$ → نسبت به EOQ کمتر است

$$T^*=\sqrt{\frac{2A}{hD(1-D/P)}}=\frac{Q^*}{D}$$

$$K(Q^*)=\sqrt{2DAh(1-\frac{D}{P})}$$

نکته: باز هم هزینه کمتر از EOQ است (به خاطر حذف یک محدودیت $P=\infty$)

نکته: $r^*\leq y(t)\leq r^*+Q^*$

$r^*=DL$

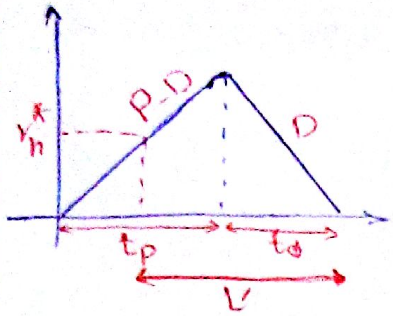
$DL\leq y(t)\leq DL+Q^*$

$(L'=L-mT\ ,\ m=\left[\frac{L}{T}\right])$

نکته: وقتی $t_d\leq L'$ باشد داریم:

$$r_h^*=DL'=DL-mQ^*$$

وقتی $L' > t_d$ باشد داریم :



$$r_h^* = (P-D)(T-L') \Rightarrow r_h^* = DL - PL + (m+1)\left(\frac{P}{D}-1\right)Q^*$$

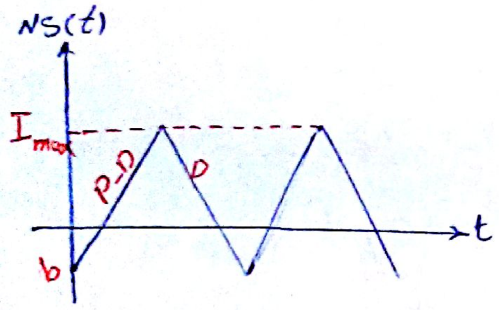
مثال : $P=2000 \frac{\text{واحد}}{\text{سال}}$, $D=1000 \frac{\text{واحد}}{\text{سال}}$, $L=3$ ماه , $Q^*=200$, $r_h^*=?$

$$T=\frac{Q^*}{D}=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5} \Rightarrow t_d=T\left(1-\frac{D}{P}\right)=\frac{1}{5}\left(1-\frac{1000}{2000}\right)=\boxed{\frac{1}{10}}$$

$$m=\left[\frac{L}{T}\right]=\left[\frac{1/2}{1/5}\right]=1 \Rightarrow L'=L-mT=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\boxed{\frac{3}{20}}$$

$$L'<t_d \Rightarrow r_h^*=DL-mQ^* \Rightarrow \boxed{r_h^*=50}$$

مدل تولیدی پس‌افت



$$\pi D \geq \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)} \Rightarrow b^*=0 \,/\, Q^*=EPQ \,/\, K(Q^*)=K[EPQ]$$

$\pi=cte, \hat{\pi}=0$ (I

$$\pi D < \sqrt{2DAh\left(1-\frac{D}{P}\right)} \Rightarrow b^*=\infty \,/\, Q^*=0 \,/\, K(Q^*)=\pi D$$

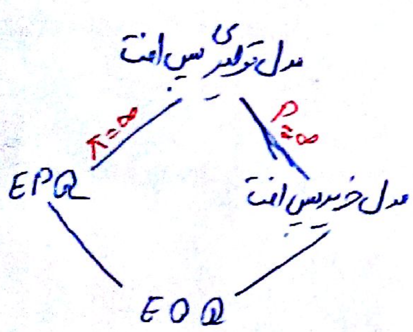
$\pi=0$, $\hat{\pi}=cte$ (II

$$Q^*=\frac{Q_w}{\sqrt{1-\frac{D}{P}}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$

$$K(Q^*)=\sqrt{2DAh}\sqrt{1-\frac{D}{P}}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

$$I_{max}=Q_w\sqrt{1-D/P}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$$

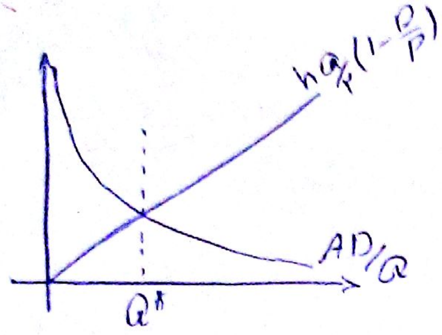
$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2A}{hD(1-D/P)}\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$$



$$\begin{cases} r_h^*=DL'-b^*=DL-mQ^*-b^* & L'<t_d \\ r_h^*=(P-D)(T-L')-b^* & L'\geq t_d \end{cases}$$

	EPQ		EOQ		پس‌افت $\pi=0, \hat{\pi}=cte$
مقدار سفارش بهینه	$\frac{Q_w}{\sqrt{1-D/P}}$	$>$	Q_w	$<$	$Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}$
حداکثر موجودی در دست	$Q_w\sqrt{1-\frac{D}{P}}$	$<$	Q_w	$>$	$Q_w\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$
متوسط موجودی در دست	$\frac{Q_w}{2}\sqrt{1-D/P}$	$<$	$\frac{Q_w}{2}$	$>$	$\frac{(Q-b)^2}{2Q}$
کل هزینه نگهداری سالیانه	$h\frac{Q_w}{2}\sqrt{1-D/P}$	$<$	$\frac{hQ_w}{2}$	$>$	$\frac{h(Q-b)^2}{2Q}$
کل هزینه سفارش‌دهی "	$A\frac{D}{Q^*}$	$<$	$A\frac{D}{Q_w}$	$>$	$A\frac{D}{Q^*}$
کل هزینه متغیر سالیانه	$\sqrt{2DAh}\sqrt{1-D/P}$	$<$	$\sqrt{2DAh}$	$>$	$\sqrt{2DAh}\sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}$

- نکات مدل EPQ



۱) $Q\uparrow$ $\quad A\frac{D}{Q}\downarrow$ $\quad h\frac{Q}{2}(1-\frac{D}{P})$

۲) $Q>Q^*$ $\quad h\frac{Q}{2}(1-\frac{D}{P})>A\frac{D}{Q}$

$Q=Q^*$ $\quad h\frac{Q}{2}(1-\frac{D}{P})=AD/Q$

$Q<Q^*$ $\quad h\frac{Q}{2}(1-\frac{D}{P})<AD/Q$

۳) $$K(Q^*)=A\frac{D}{Q^*}+h\frac{Q^*}{2}(1-\frac{D}{P})=2A\frac{D}{Q^*}=hQ^*(1-\frac{D}{P})=\sqrt{2DAh(1-\frac{D}{P})}=\frac{2A}{T^*}=2nA$$

۴) $$\frac{K(Q)}{K(Q^*)}=\frac{1}{2}(\frac{Q}{Q^*}+\frac{Q^*}{Q})$$

۵)

	Q^*	$K(Q^*)$
$A\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
$D\uparrow$	$\uparrow$	معلوم نیست
$h\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$(i,c,w)\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$P\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$
$L\uparrow$	تغییر نمی‌کند	تغییر نمی‌کند.

$$Q^*=\sqrt{\frac{2DA}{h(1-\frac{D}{P})}}$$

$$K(Q^*)=\sqrt{2DAh(1-\frac{D}{P})}$$

مدل های چند محصولی

- مدل چند محصولی ساده

فرضیات مدل مانند EOQ با این تفاوت که برنامه ریزی برای چند محصول با هم انجام می شود.

هدف مدل: کمینه کردن هزینه ها و محاسبه r_j^*، r_{hj}^*، Q_j^* ← محصول j را چقدر سفارش دهیم

r_j^*: محصول j را براساس موقعیت موجودی کی سفارش دهیم $\quad r_{hj}^*$: محصول j را براساس موجودی خالص کی سفارش دهیم.

$$\min\ z=\sum_j\left[A_j\frac{D_j}{Q_j}+h_j\frac{Q_j}{2}+C_jD_j\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial Q_j}\Rightarrow Q_j^*=Q_{wj}=\sqrt{\frac{2D_jA_j}{h_j}}$$

چون محصولات با هم ارتباط ندارند

⇓

دقیقاً مثل EOQ

$$K(Q_j^*)=\sqrt{2D_jA_jh_j}$$

$$r_j^*=D_jL_j$$

$$r_{hj}^*=D_jL_j-m_jQ_j^* \qquad m_j=\left[\frac{L_j}{T_j}\right]$$

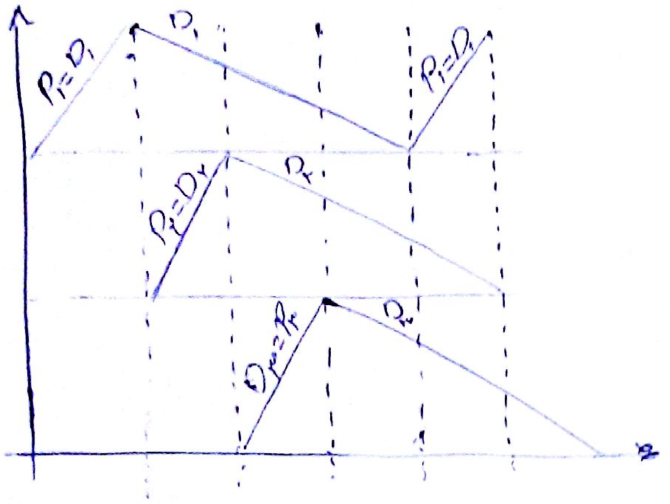
مدل چند محصولی تولیدی:

فرضیات مدل مانند مدل چند محصولی بالا، تفاوت کند:

۱) سفارش‌ها به تدریج دریافت می‌شود. $\forall j \; P_j = cte$

۲) کلیه محصولات توسط یک خط تولید یا دستگاه تولید می‌شوند. اگر همه محصولات توسط یک دستگاه نبود، دقیقاً مثل EPQ می‌شد.

۳) $\forall j \; T_j = T$



$\frac{D_j}{P_j}$ درصد زمان تولید محصول jام توسط ماشین در سال

$\sum \frac{D_j}{P_j}$ درصد زمان کار ماشین در سال (درصدی از زمان که خط تولید کار می‌کند)

$1 - \sum \frac{D_j}{P_j}$ درصد زمان بیکاری ماشین در سال

$\sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1$ شرط لازم برای جواب دار بودن مسئله

$T(1 - \sum \frac{D_j}{P_j})$ مدت زمان بیکاری در دوره

$$\min \quad z = \sum \left[A_j \frac{D_j}{Q_j} + h_j \frac{Q_j}{2} \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right) \right]$$

$$k(T) = \frac{\sum A_i}{T} + \frac{T}{2} \sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)$$

$$\frac{dk(T)}{dT} = 0 \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{2 \sum A_j}{\sum h_j D_j \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)}} \quad , \quad Q_j^* = D_j T^*$$

الگوریتم حل مدل:

ابتدا شرط جواب دار بودن مسئله $\left(\sum \frac{D_j}{P_j} \leq 1\right)$ را چک می‌کنیم. اگر برقرار نباشد مدل جواب ندارد. اگر برقرار باشد مقدار T^* را ابتدا حساب می‌کنیم و بر مبنای T^* بدست آمده Q_j^* را حساب می‌کنیم.

$$I_{max\,j} = Q_j^* \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)$$

$$\bar{I}_j = \frac{Q^*}{2} \left(1 - \frac{D_j}{P_j}\right)$$

$P_1=۲۷۰۰۰$ $D_1=۹۰۰۰$ $A_1=۸۰۰$ $h_1=۵$ $Q_1^*=?$

$P_۲=۳۶۰۰۰$ $D_۲=۱۸۰۰۰$ $A_۲=۷۰۰$ $h_۲=۶$ $Q_۲^*=?$

$P_۳=۹۰۰۰$ $D_۳=۶۰۰۰$ $A_۳=۵۰۰$ $h_۳=۸$ $Q_۳^*=?$

Q_3 Q_2 Q_1

الف- ۱۹۰۰ ، ۳۲۰۰ ، ۲۰۰۰

ب- ۱۷۰۰ ، ۴۴۰۰ ، ۱۶۰۰

ج- ۱۲۰۰ ، ۳۶۰۰ ، ۱۸۰۰

د- ۱۰۰۰ ، ۲۸۰۰ ۱۲۰۰

$$T^*=\sqrt{\frac{۲\sum A}{\sum hD(1-\frac{D}{P})}}=۰/۲ \Rightarrow Q_j^{*}=D_j T^* \Rightarrow \begin{cases} Q_1^*=۰/۲\times ۹۰۰۰=۱۸۰۰ \\ Q_۲^*=۳۶۰۰ \\ Q_۳^*=۱۲۰۰ \end{cases}$$

مدل چند محصولی با وجود زمان آماده سازی

$$T_0=\sqrt{\frac{۲\sum A_j}{\sum h_j D_j(1-\frac{D_j}{P_j})}} \longrightarrow$$ بدون وجود زمان آماده سازی

$$(I)\quad \sum S_j \le (1-\sum\frac{D_j}{P_j})T_0 \Rightarrow \begin{cases} T^*=T_0 \\ Q_j^*=D_j T_0 \end{cases}$$

مجموع زمان بیکاری [illegible]

$$(II)\quad \left.\begin{array}{l} \sum S_j > (1-\sum\frac{D_j}{P_j})T_0 \\ T_{min}=\dfrac{\sum S_j}{(1-\sum\frac{D_j}{P_j})} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} T^*=T_{min} \\ Q_j^*=D_j T_{min} \end{array}$$

$$T^*=\max\{T_0, T_{min}\} \Rightarrow K(T^*) \begin{cases} \xrightarrow{T_0} \sqrt{۲\sum A_j \sum h_j D_j(1-\frac{D_j}{P_j})} \\ \xrightarrow{T_{min}} \dfrac{\sum A_j}{T}+\dfrac{T}{۲}\sum h_j D_j(1-\frac{D_j}{P_j}) \end{cases}$$

مدل چند محصولی در حالت محدودیت فضا

مفروضات مدل مانند مدل چند محصولی ساده با این تفاوت که محدودیت فضا وجود دارد.

F: حداکثر فضای موجود انبار

f_j: فضای اشغالی هر واحد محصول j ام

$$\sum f_j I_{max_j} \le F$$

$$\boxed{\sum f_j Q_j \le F} \longrightarrow \quad \min z=\sum \frac{D_j A_j}{Q_j}+h_j\frac{Q_j}{۲}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum f_j Q_j \le F$$

$$\sum f_j Q_j(1-\frac{D_j}{P_j}) \le F$$

$$\sum f_j (Q_j-b_j) \le F$$

$$\min J = z+\theta(F-\sum f_j Q_j)$$

ضریب لاگرانژ

$$\frac{\partial J}{\partial \theta}=0 \Rightarrow \sum f_j\sqrt{\frac{۲D_jA_j}{h_j+۲\theta^* f_j}}=F \qquad (I)$$

$$\frac{\partial J}{\partial Q_j}=0 \Rightarrow Q_j^*=\sqrt{\frac{۲D_jA_j}{h_j+۲\theta^* f_j}} \qquad (II)$$

الگوریتم حل مدل

ابتدا از محدودیت فضا صرف نظر کرده Q_{wj} جواب مدل خواهد بود. اگر Q_{wj} محدودیت فضا را راضی کرد جواب مدل خواهد بود

از ضرایب لاگرانژ برای حل مسئله استفاده می شود یعنی مقدار θ^* از رابطه (I) محاسبه شده و در (II) جایگزین می شود.

مثال: کارخانه ای ۳ نوع کالای سفارشی ۱، ۲ و ۳ دارد کل فضای انبار این کارخانه $۷۰۰m^۲$ است در صورتی که سایر پارامترهای مدل به صورت زیر باشند مقدار بهینه سفارش هر محصول چقدر است؟

۳	۲	کالای ۱	
۱۰۰۰۰	۲۰۰۰	۵۰۰	تقاضا
۷۵	۲۰۰	۱۰۰	هزینه هر بار سفارش
۵	۱۵	۱۰	قیمت هر کالا
۰٫۴	۰٫۸	۰٫۷	فضای اشغال هر واحد
۰٫۲	۰٫۲	۰٫۲	نرخ هزینه نگهداری سالیانه

$Q_{w_1}=\sqrt{\frac{۲D_1A_1}{h_1}}$ = ۷۰۷

Q_{w_2} = ۵۱۶

Q_{w_3} = ۱۲۲۴

$\sum f_i Q_{w_i} \le$ ۷۰۰

۱.	Q_3^*	Q_2^*	Q_1^*
	۱۲۲۴	۵۱۶	۷۰۷
	۱۲۲۴	۲۸۰	۷۰۷
	۵۷۱ ✓	۲۸۰	۳۴۸
	۵۷۱	۵۱۶	۳۴۸

مدل چند محصولی در حالت محدودیت سرمایه درگیر در موجودی

X: حداکثر سرمایه موجود.

حداکثر سرمایه مورد نیاز محصول j ام = $C_j I_{max\,j}$

حداکثر سرمایه مورد نیاز کل محصولات = $\sum_j C_j I_{max\,j}$

مدل خرید = $\sum C_j Q_j$

تولید = $\sum C_j Q_j(1-\frac{D_j}{P_j})$

پس افت = $\sum C_j(Q_j-b_j)$

$$Q_{wj}=\sqrt{\frac{۲D_jA_j}{h_j}}$$

$$\frac{\partial j}{\partial \beta}=0 \Rightarrow \sum C_j\sqrt{\frac{۲D_jA_j}{h_j+۲\beta^*C_j}}=X$$

$$\frac{\partial j}{\partial Q_j}=0 \Rightarrow Q_j^*=\sqrt{\frac{۲D_jA_j}{h_j+۲\beta^*C_j}}$$

$$Q_j^*=\sqrt{\frac{۲D_jA_j}{h_j+۲\beta^*C_j}}=\sqrt{\frac{۲D_jA_j}{h_j}}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{۲\beta^*C_j}{h_j}}}\xrightarrow{\text{if } h_j=iC_j} Q_j^*=\sqrt{\frac{۲D_jA_j}{h_j}}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{۲\beta^*}{i}}}$$

$$\frac{Q_1^*}{Q_{w_1}}=\frac{Q_2^*}{Q_{w_2}}=\frac{Q_3^*}{Q_{w_3}}$$

مدل چند محصولی با محدودیت تعداد دفعات سفارش در سال

l: حداکثر تعداد سفارش در سال

مدل خرید $\sum_j \frac{D_j}{Q_j} \leq l$

تولید $\sum \frac{D_j}{Q_j} \leq l$

پس‌افت $\sum_j \frac{D_j}{Q_j} \leq l$

$$Q_j^* = \sqrt{\frac{۲D_j(A_j+\lambda^*)}{h_j}} \Rightarrow Q_j^* \geq Q_{wj}$$

مدل چند محصولی در حالت الزام سفارش هم‌زمان

$$\forall j \quad T_j = T = \frac{Q_j}{D_j}$$

$$\min Z = \sum \frac{D_j A_j}{Q_j} + \sum h_j \frac{Q_j \to D_j T}{۲}$$

$$k(T) = \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{۲}\sum h_j D_j \Rightarrow \frac{dk(T)}{d(T)} = ۰ \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{۲\sum A_j}{\sum h_j D_j}}$$

$$Q_j^* = D_j T^* \qquad k(T^*) = \sqrt{۲\sum A_j \sum h_j D_j} = \frac{۲\sum A_j}{T^*} = T^* \sum h_j D_j$$

مثال: دو محصول I و II با هم سفارش داده می‌شوند. هزینه‌های ثابت هر بار سفارش ۱۰۰ تومان است. هزینه نگهداری هر واحد محصول I و هزینه نگهداری هر واحد محصول II مساوی و برابر ۱۰ تومان برای هر واحد در سال است. تقاضای سالیانه محصول I برابر ۵۰۰ واحد و محصول II برابر ۱۵۰۰ واحد است. هر دو در سفارش (فاصله زمانی بین دو سفارش متوالی) بهینه چقدر است؟ ب. مقدار سفارش بهینه هر محصول چقدر است؟

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{۲} A_i = ۱۰۰ \\ h_1 = h_2 = ۱۰ \\ D_1 = ۵۰۰, D_2 = ۱۵۰۰ \end{array}\right\} \Rightarrow T^* = \sqrt{\frac{۲\sum A_j}{\sum h_j D_j}} = ۰/۱ \Rightarrow Q_j^* = D_j T^* \Rightarrow \begin{cases} Q_1^* = ۵۰۰ \times ۰/۱ = ۵۰ \\ Q_2^* = ۱۵۰۰ \times ۰/۱ = ۱۵۰ \end{cases}$$

مدل چند محصولی در حالت الزام سفارش همزمان و محدودیت تعداد سفارش در سال

$$I)\ \forall j \quad T_j = T$$

$$II)\ \frac{D_j}{Q_j} \leq l \Rightarrow \frac{1}{T} \leq l \Rightarrow T \geq \frac{1}{l}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_0 = \sqrt{\frac{۲\sum A_j}{\sum h_j D_j}} \\ T_{min} = \frac{1}{l} \end{array}\right\} \Rightarrow T^* = \max\{T_0, T_{min}\}$$

$$Q_j^* = D_j T^* \qquad k(T^*) - \begin{cases} T^* = T_0 \Rightarrow \sqrt{۲\sum A_j \sum h_j D_j} \\ T^* = T_{min} \quad \frac{\sum A_j}{T} + \frac{T}{۲}\sum h_j D_j \end{cases}$$

مثال: مصرف سالیانه دو کالا به ترتیب ۱۰۰۰۰ و ۱۲۰۰۰ واحد و هزینه نگهداری هر واحد هر یک از دو کالا ۲ تومان در سال است. این دو کالا الزاماً باید با هم سفارش داده شوند. هزینه سفارش‌دهی این دو کالا مجموعاً ۱۰۰۰ تومان و بیش از ۵ بار سفارش‌دهی در سال مجاز نیست. مقدار سفارش اقتصادی هر یک از دو کالا چقدر است؟

$$\left.\begin{array}{l} D_1 = ۱۰۰۰۰, D_2 = ۱۲۰۰۰ \\ h_1 = h_2 = ۲ \\ T_j = T, \quad \frac{D_j}{Q_j^*} \leq ۵ \Rightarrow T \geq \frac{1}{۵} \\ \sum A_j = ۱۰۰۰ \end{array}\right\} \Rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{۲\sum A_j}{\sum h_j D_j}} = \sqrt{\frac{۲۰۰۰}{۴۴۰۰۰}} = ۰/۲۱۳۲ \Rightarrow T^* = T_0 = ۰/۲۱۳۲$$

$$Q_j^* = D_j T^* \Rightarrow \begin{cases} Q_1^* = ۲۱۳۲ \\ Q_2^* = ۲۵۵۹ \end{cases}$$

- **نکته:** در صورتی که در یک مدل چند محصولی دو یا بیش از دو محدودیت ارائه شود حل مسأله بدین صورت است که از محدودیت نسبتاً پیچیده صرف نظر کنیم و جواب مسأله را بدست آوریم. اگر جواب‌ها محدودیت در نظر گرفته نشده را ارضا کرد، جواب بدست آمده جواب اصلی مسأله خواهد بود. در غیر اینصورت مقداری جواب مسأله است که آن محدودیت مساوی می‌شود.

نکته: در صورتی که در یک مدل چند محصولی یا تک محصولی، محدودیتی غیر از محدودیت‌های عنوان شده ارائه شود محدودیت را بر اساس متغیر خواسته شده در مسأله می‌نویسیم. پس از محدودیت صرف‌نظر می‌شود و جواب بهینه را بدست می‌آوریم. اگر محدودیت را ارضا کرد جواب اصلی مسأله است. در غیر اینصورت جوابی جواب اصلی مسأله است که محدودیت را مساوی کند.

مثال: تولیدکننده‌ای محصولی تولید می‌کند از این نقطه نظر که محصول در انبار تحت تأثیر فاسد شدن بوده برای شرکت نگران‌کننده است. او احساس می‌کند که بیشینه زمانی که می‌تواند هر واحد از محصول را بصورت موجودی نگه دارد ۲ هفته است. او محصول را بصورت انباشته تولید می‌کند و فرایند تولیدی به نحوی است که کل انباشته در یک لحظه تکمیل شده و به موجودی اضافه می‌شود. نرخ تقاضای سالیانه ۵۲۰۰ واحد، هزینه راه‌اندازی تولید ۴۰۰ تومان، نرخ هزینه نگهداری موجودی ۲۰% در هر هزینه متغیر هر واحد محصول ۱۰۰ تومان بوده و هیچ کمبود موجودی مجاز نیست. اندازه انباشته اقتصادی را با توجه به محدودیت عمر نگهداری محصولات در انبار محاسبه کنید (سال را ۵۰ هفته در نظر بگیرید)

$D=۵۲۰۰$

$A=۴۰۰$

$i=۰/۲$

$C=۱۰۰$

$Q^*=?$

$$T\le\frac{۲}{۵۰}\Rightarrow\frac{Q}{D}\le\frac{۲}{۵۰}\Rightarrow\frac{Q}{۵۲۰۰}\le\frac{۲}{۵۰}\Rightarrow Q\le ۲۰۸$$

$$Q=\sqrt{\frac{۲\times۵۲۰۰\times۴۰۰}{۰/۲\times۱۰۰}}=۴۵۶$$

چون محدودیت را ارضا نکرد جواب مسأله جوابی است که محدودیت را مساوی کند $\Rightarrow$ $\boxed{Q^*=۲۰۸}$

مثال: با دستگاهی می‌توان محصولی را با نرخ سالیانه ۱۰۰۰۰ واحد تولید کرد. میزان تقاضاهای سالیانه برای این محصول ۵۰۰۰ واحد است. هزینه آماده‌سازی هر بار این دستگاه برای تولید ۲۰۰۰ تومان، هزینه نگهداری این محصول در سال ۱۰۰ تومان و هزینه مواد برای هر محصول ۵۰ تومان است. اگر قرار باشد حداکثر سرمایه درگیر در موجودی این محصول ۲۰۰۰ تومان باشد مقدار بهینه تولید این محصول چقدر است؟

$P=۱۰۰۰۰\ \frac{\text{واحد}}{\text{سال}}$

$D=۵۰۰۰$ 〃

$A=۲۰۰۰$

$C=۵۰$

$X=۲۰۰۰$

$h=۱۰۰$

$$CI_{max}\le۲۰۰۰\Rightarrow CQ(1-\frac{D}{P})\le۲۰۰۰\Rightarrow۵۰Q(1-\frac{D}{P})\le۲۰۰۰$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow Q\le۸۰\\ Q=\sqrt{\frac{۲DA}{h(1-\frac{D}{P})}}=۲۰۰\end{array}\right\}\Rightarrow Q^*=۸۰$$

$Q=۲۰۰$ محدودیت را ارضا نکرد

پس جواب مسأله جوابی است که محدودیت را مساوی کند

تخفیف

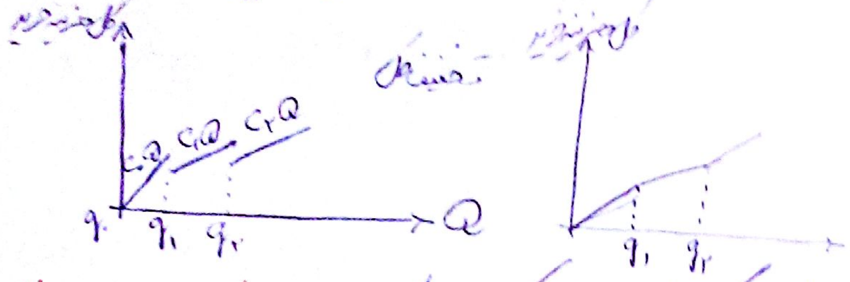
یعنی قیمت کالا با افزایش مقدار سفارش کاهش می‌یابد.

تخفیف
- کلی
- نموی (افزایشی)

تخفیف کلی: قیمت تخفیف داده شده برای کلیه واحدهای خریداری شده یکسان در نظر گرفته می‌شود.

تخفیف نموی: قیمت تخفیف داده شده صرفاً برای مقادیر داخل محدوده تخفیف قابل محاسبه است

شماره محدوده	محدوده تخفیف	قیمت هر واحد	تخفیف کلی	تخفیف نموی
۰	$q_0<Q<q_1$	c_0	c_0Q	c_0Q
۱	$q_1<Q<q_2$	c_1	c_1Q	$c_0(q_1-q_0)+c_1(Q-q_1)$
⋮				
j	$q_j<Q<q_{j+1}$	c_j	c_jQ	$\sum_{k=1}^{j}c_{k-1}(q_k-q_{k-1})+c_j(Q-q_j)$
⋮				
n	$q_n\le Q$			



- نمودار هزینه خرید تخفیف کلی یک نمودار گسسته است یا برای این نمودار کل هزینه سالیانه تخفیف کلی نیز گسسته است.

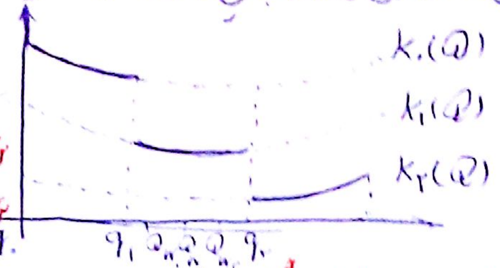
مدل تخفیف کلی: فرضیات مدل مانند مدل EOQ با این تفاوت که تخفیف از نوع کلی وجود دارد.

هدف مدل: مانند EOQ

کل هزینه سالیانه محدوده jام

$$k_j(Q)=A\frac{D}{Q}+\overset{ic_j+w}{h_j}\frac{Q}{2}+c_jD$$

$$Q_{w_j}=\sqrt{\frac{2DA}{h_j}}\Rightarrow\begin{cases}\text{if } h_j=w\Rightarrow Q_{w_0}=Q_{w_1}=Q_{w_2}\\ \text{if } h_j=ic_j+w\Rightarrow Q_{w_0}<Q_{w_1}<Q_{w_2}\end{cases}$$



نحوه انتخاب نقطه بهینه قابل قبول محدوده jام (Q_j^*)

- اگر $Q_{w_j}<q_j \Leftarrow Q_j^*=q_j$ - اگر $q_j<Q_{w_j}<q_{j+1} \Leftarrow Q_j^*=Q_{w_j}$ - اگر $Q_{w_j}>q_{j+1} \Leftarrow Q_j^*=q_{j+1}$

الگوریتم حل مدل:

از محدوده آخر (nام) شروع می‌کنیم ابتدا Q_{w_n} را حساب می‌کنیم این کار را تا وقتی ادامه می‌دهیم که برای اولین بار Q_{w_j} داخل محدوده تخفیف بیفتد یعنی $Q_j^*=Q_{w_j}$ برای Q_j^*های به دست آمده $k(Q_j^*)$ را حساب می‌کنیم مقداری که کمترین هزینه را دارد مقدار بهینه Q^* است.

نکته: در مدل تخفیف کلی نقاط قابل بررسی نقاط ویلسون و نقاط تغییر قیمت سمت راست آن هستند در این مدل اگر کل هزینه سالیانه ن را با TCH و کل هزینه سفارش‌دهی را با TCS نشان دهیم رابطه زیر برقرار است:

$$TCH\ge TCS$$

نکته: در صورتیکه یک مدل خلاف مدل تخفیف کلی با افزایش مقدار سفارش قیمت هر واحد کالا افزایش یابد در این صورت الگوریتم حل مدل مشابه مدل تخفیف کلی است با این تفاوت که فرایند حل از محدوده اول شروع می‌شود.

$$TCS\ge TCH$$

$$r^*=DL,\ r_h^*=DL_0-mQ^*$$

مثال: مصرف سالیانه کالایی ۱۷۰۰ واحد، هزینه سفارش‌دهی آن ۶۰۰ تومان و هزینه نگهداری هر واحد آن ۴ تومان است در سال. هزینه حمل و نقل هر واحد کالا طبق جدول زیر است. مقدار سفارش اقتصادی این کالا چقدر است؟

هزینه هر واحد کالا	مقدار سفارش
۲	۰-۲۰۰
۳	۲۰۱-۵۰۰
۳٫۵	۵۰۱-۱۰۰۰
۴	۱۰۰۱-∞

$$Q_w=\sqrt{\frac{2DA}{h}}\simeq 714$$

$$k(714)=A\frac{D}{Q}+CD+h\frac{Q}{2}$$

$$k(500)$$

$$k(200)$$

- تخفیف نموی:

فرضیات مدل: مانند EOQ با این تفاوت که تخفیف وجود دارد و از نوع نموی است.

هدف مدل: مانند مدل EOQ

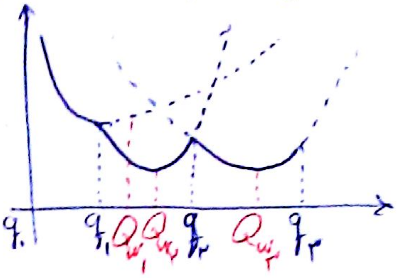
$$K_j(Q)=D\frac{A}{Q}+\underbrace{h_j}_{i\bar{C}}\frac{Q}{۲}+\bar{C}D$$

$$\bar{C}=\frac{R(Q)}{Q}=\frac{R(Q_j)+C_j(Q-q_j)}{Q}$$

$$R(Q)=\underbrace{\underbrace{C_۰(q_۱-q_۰)}_{R(Q_۱)}+C_۱(q_۲-q_۱)}_{R(Q_۲)}+C_۲(Q-q_۲)=R(Q_j)+C_j(Q-q_j)$$

$$K_j(Q)=\frac{D}{Q}(A+R(Q_j)-C_jQ_j)+iC_j\frac{Q}{۲}+C_jD+\frac{i}{۲}R(Q_j)-\frac{i}{۲}C_jq_j$$

$$\Longrightarrow Q_{w_j}=\sqrt{\frac{۲D(A+R(Q_j)-C_jq_j)}{iC_j}}$$



- در مدل تخفیف نموی، نقاط تخفیف نمی‌توانند نقطه بهینه مدل باشند (چون مشتق پذیر نیستند)

الگوریتم حل مدل:

برای تمامی محدوده ها Q_{w_j} را حساب می کنیم اگر Q_{w_j} داخل محدوده تخفیف بیفتد، هزینه Q_{w_j} را حساب می کنیم. اگر Q_{w_j} داخل محدوده تخفیف نیفتد آن محدوده نقطه بهینه قابل بررسی ندارد. از بین نقاط کاندید، نقطه با کمترین هزینه کل جواب مسأله خواهد بود.

مثال: محصولی در انباشته های Q تایی خریداری شده و دریافت می شود. نرخ تقاضای سالیانه در مقدار ۱۰۰۰۰ واحد ثابت بوده، هزینه ثابت هر بار سفارش ۶۴ تومان، هزینه متغیر هر واحد محصول ۴ تومان، نرخ هزینه نگهداری موجودی در سال ۲۵ درصد بوده و هیچ کمبود موجودی مجاز نیست. هزینه اجاره برای ذخیره موجودی که براساس بیشینه موجودی تعیین می شود در نرخ هزینه نگهداری موجودی گنجانده نشده و به شرح زیر است:

برای سطح موجودی تا ۵۰۰ واحد، ۱ تومان برای هر واحد محصول در سال و برای مقادیر محصول اضافه بر ۵۰۰ واحد، ۱،۵ تومان برای هر واحد محصول در سال هزینه اجاره برای فضای نگهداری موجودی منظور می شود. اندازه انباشته اقتصادی چقدر است؟

$D=۱۰۰۰۰$ $A=۶۴$ $C=۴$ $\pi,\hat{\pi}=\infty$ $\begin{cases}h_۲=۱ & Q\leq ۵۰۰\\ h_۲=۱،۵ & Q>۵۰۰\end{cases}$ $i=۲۵٪$

$$\begin{cases}h_۰=iC+۲(۱)=۰/۲۵\times۴+۲(۱)=۳\\ h_۱=iC+۲(۱،۵)=۰/۲۵\times۴+۲(۱،۵)=۴\end{cases}$$

$$\begin{cases}K_۰(Q)=D\frac{A}{Q}+h_۰\frac{Q}{۲}+CD \longrightarrow Q_{w_۱}=\sqrt{\frac{۲DA}{h_۰}}=۶۵۳ \times\\ K_۱(Q)=D\frac{A}{Q}+h_۰\frac{۵۰۰}{۲}+\frac{h_۱}{۲}(Q-۵۰۰)+CD\end{cases}$$

$$Q_{w_۱}=\sqrt{\frac{۲DA}{h_۱}}=۵۶۶ \checkmark$$

مدل احتمالی یک دوره‌ای (درخت کریسمس - روزنامه فروش)

فرضیات مدل: مانند مدل EOQ با این تفاوت‌ها که:

۱) تقاضا احتمالی است.　　۲) کمبود مجاز است (از نوع فروش از دست رفته)

۳) برنامه‌ریزی صرفاً برای یک دوره انجام می‌پذیرد و موجودی باقیمانده در انتهای دوره خارج شده یا از بین می‌رود.

۴) هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهایی حساب می‌شود که در انتهای دوره باقی مانده‌اند.

۵) سفارش حداکثر یکبار و در ابتدای دوره قابل دریافت است.

۶) در ابتدای دوره موجودی برابر با I، قبلاً خریداری شده است. تصمیم بر این است که ببینیم این میزان موجودی کافی است یا باید سفارش دهیم

متغیرها و پارامترهای مدل

D: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان یک دوره

$f_D(x)$: تابع چگالی تقاضا در طول دوره　　$F_D(x)$: تابع توزیع تجمعی تقاضا در دوره

C: قیمت خرید هر واحد کالا　　H: هزینه هر واحد باقیمانده در انتهای دوره

V: قیمت فروش هر واحد کالا　　h: هزینه نگهداری هر واحد کالا در طول دوره (این هزینه صرفاً برای واحدهای باقیمانده در انتهای دوره حساب می‌شود)

π: هزینه کمبود هر واحد کالا

L: قیمت خارج هر واحد باقیمانده　　A: هزینه سفارش‌دهی　　I: موجودی ابتدای دوره

$$H = h + \text{هزینه انتقال هر واحد برای خارج یا از بین بردن} - L$$

R: مقدار بهینه موجودی در ابتدای دوره

Q: مقدار سفارش بهینه

$$\underbrace{Z(R)}_{\text{سود حاصل از دوره}}=\underbrace{P(R)}_{\text{درآمد حاصل از دوره}}-\underbrace{Q(R)}_{\text{هزینه دوره}}$$

$$\begin{cases} \text{if } R<I \Rightarrow Q=0 \\ \text{if } R\geq I \Rightarrow R=Q+I \end{cases}$$

$$E(Z(R))=V\left[E(D)-\int_R^{+\infty}(x-R)f_D(x)dx\right]-\left[C(R-I)+H\int_0^R(R-x)f_D(x)dx+\pi\int_R^{+\infty}(x-R)f_D(x)dx\right]$$

$$H\left[\int_0^R(R-x)f_D(x)dx+\int_R^{+\infty}(R-x)f_D(x)dx-\int_R^{+\infty}(R-x)f_D(x)dx\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^{+\infty}(R-x)f_D(x)dx=R\int_0^{+\infty}f_D(x)dx-\int_0^{+\infty}xf_D(x)dx=R-E(D)$$

$$C(R-I)+HR-HE(D)-H\int_R^{+\infty}(R-x)f_D(x)dx+\pi\int_R^{+\infty}(x-R)f_D(x)dx=C(R-I)+HR-HE(D)+(\pi+H)\int_R^{+\infty}(x-R)f_D(x)dx$$

$$E(Z(R))=(V+H)E(D)-\left[C(R-I)+HR+(V+\pi+H)\int_R^{+\infty}(x-R)f_D(x)dx\right]$$

$$=(V+H)E(D)-k(R)$$

$$\frac{\partial k(R)}{\partial R}=0\Rightarrow(C+H)-(V+\pi+H)[1-F(R)]=0\Rightarrow F(R^*)=\frac{V+\pi-c}{V+\pi+H}\Rightarrow A=0 \text{ ، تقاضا پیوسته}$$

$F(R^*) \geq \dfrac{V+\pi-C}{V+\pi+H}$

تقاضا گسسته و $A=0$

کوچکترین مقدار R که رابطه بالا را برآورده کند

متوسط واحدهای باقیمانده در انتهای دوره $= \int_0^R (R-x) f_D(x)\, dx$ پیوسته

" " " " $= \sum_{x=0}^{R} (R-x) P(D=x)$ گسسته

متوسط کل هزینه نگهداری در یک دوره $= h\left(\int_0^R (R-x) f_D(x)\, dx\right)$

متوسط تعداد کمبود در یک دوره $= \int_R^{+\infty} (x-R) f_D(x)\, dx$ پیوسته

" " " " $= \sum_{x=R}^{\infty} (x-R) P(D=x)$ گسسته

متوسط کل هزینه کمبود در یک دوره $= \pi\left(\int_R^{+\infty} (x-R) f_D(x)\, dx\right)$

مثال، کارگاهی قرار است محصولی را که در ایام عید به فروش می رسد تولید کند. تابع توزیع تقاضا برای این محصول به صورت زیر تخمین زده شده است اگر هزینه تولید هر واحد برابر ۳۰۰۰ تومان، قیمت فروش هر واحد ۵۰۰۰ تومان، قیمت حراج هر واحد باقیمانده در انتهای دوره ۲۰۰۰ تومان باشد میزان تولید بهینه برای محصول چقدر است در صورتیکه مقدار موجودی ابتدای دوره ۴ عدد باشد؟ ب) متوسط کمبود چقدر است؟ ج) متوسط موجودی باقیمانده چقدر است؟

x	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	$\boxed{۱۱}$	۱۲	۱۳	۱۴
f(x)	۰	۰/۰۵	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۲	۰/۲	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۵

V=۵۰۰۰ , C=۳۰۰۰

L=۲۰۰۰ , H=-L=-۲۰۰۰

H=h+هزینه انتقال-L

$F(R^*) = \dfrac{V+\pi-C}{V+\pi+H} =$ $\dfrac{۵۰۰۰-۳۰۰۰}{۵۰۰۰-۲۰۰۰}$ $\geq$ ۰/۶۶ $\Rightarrow$ تجمعی

در ۱۱=x، F(x) بزرگتر مساوی ۶۶٪ می شود.

$R^*=$۱۱

$Q^* = R^* - I =$ ۱۱−۴=۷

متوسط کمبود $= \sum_{x=R}^{\infty} (x-R) P(D=x) = \sum_{x=11}^{14}$ (۱۱−۱۱)×۰/۲ +(۱۲−۱۱)×۰/۱ +(۱۳−۱۱)(۰/۰۵) + (۱۴−۱۱)(۰/۰۵) = ۰/۳۵

متوسط موجودی باقیمانده $= \sum_{x=0}^{R} (R-x) P(D=x) = \sum_{x=5}^{11} (R-x) P(D=x) =$ (۱۱−۵)×۰ +(۱۱−۶)(۰/۰۵)+…+(۱۱−۱۱)(۰/۲)= ۱/۳۵

خط مشی سفارش دهی دو ظرفی

این خط مشی که حالت کاربردی از خط مشی FOS است به این صورت که انبار به دو قسمت ظرف بزرگتر Q و ظرف کوچکتر r تقسیم می شود. ابتدا از ظرف اول مصرف می کنیم به محض اینکه بخواهیم از ظرف دوم مصرف کنیم سفارش می دهیم و تا رسیدن سفارش از ظرف دوم مصرف می کنیم. وقتی Q تا سفارش رسید ابتدا ظرف دوم را تکمیل و هرچه باقیماند در ظرف اول ریخته می شود و مجدداً از ظرف اول مصرف می کنیم.

مدل احتمالی ساده با خط مشی FOS

فرضیات مدل: مانند مدل EOQ با این تفاوت ها که

1) تقاضا احتمالی و ساکن است
2) کمبود جایز است
3) خط مشی FOS است.

هدف مدل: تعیین مقدار r^* و Q^* با کمینه کردن هزینه ها موجودی

D: متغیر تصادفی تقاضا در طول سال

μ_D: میانگین تقاضا در سال

σ_D: انحراف معیار تقاضا در سال

D_L: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل

μ_{D_L}: میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل

σ_{D_L}: انحراف معیار تقاضا در مدت زمان تحویل

π: هزینه هر واحد کمبود (جبران نمی شود)

P: سطح خدمت یا قابلیت اطمینان

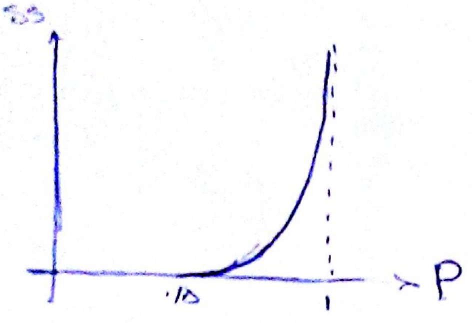
P: احتمال اینکه در یک دوره با کمبود مواجه نشویم $0 \leq P \leq 1$

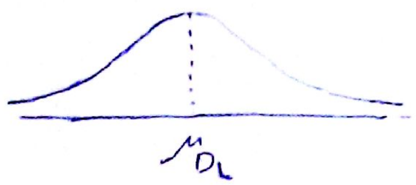
$$\begin{cases} D_L > r \longrightarrow \text{با کمبود مواجه می شویم} \\ D_L \leq r \longrightarrow \text{با کمبود مواجه نمی شویم} \end{cases}$$

$$P = P(D_L \leq r) = F_{D_L}(r)$$

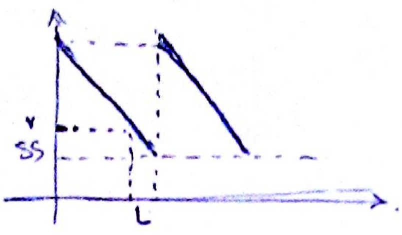
SS : موجودی اطمینان / ذخیره ایمنی

SS مقداری است که برای جوابگویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل تعریف می شود و مقدار آن تعادل بین هزینه های کمبود سالیانه و هزینه نگهداری سالیانه محاسبه می شود.





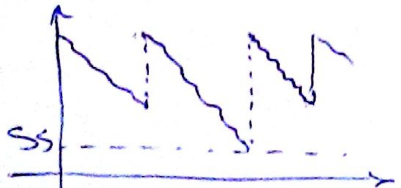
$r=\mu_{D_L}+SS$



متوسط موجودی در هنگام دریافت سفارش (یا پایان یک دوره) برابر است با: SS

متوسط موجودی در دست در خط مشی FOS، $SS+\frac{Q}{2}$ است.

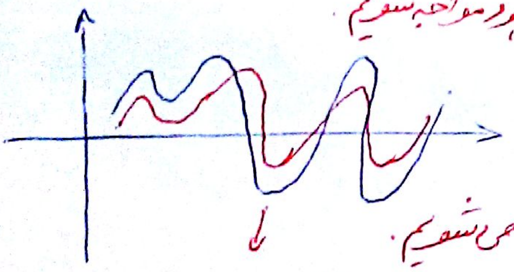
متوسط موجودی ظرف دوم در خط مشی دو ظرفی (در زمان تحویل سفارش) برابر با SS است.



$r=\mu_{D_L}=SS$

سطح خطر/سطح ریسک $=1-P$

احتمال آنکه در یک دوره با کمبود مواجه شویم $=1-P$



$$1-P=\frac{\text{متوسط تعداد دوره‌های در یک سال که با کمبود مواجه می‌شویم}}{\text{متوسط تعداد دوره‌ها در سال}}=\frac{N_b}{\frac{\mu_D}{Q}}$$

متوسط فاصله زمانی بین دو دوره متوالی که با کمبود مواجه می‌شویم. $T_b=\frac{1}{N_b}$

$1-P$ زیر هر دو منحنی برابر است.

$$\begin{cases} F_{D_L}(r)=P \\ P=N_D\times\frac{Q}{\mu_D} \end{cases}, \quad r=\mu_{D_L}+SS \Longrightarrow SS=r-\mu_{D_L}$$

$$\begin{cases} b(r)=\int_r^{+\infty}(x-r)\,f_{D_L}(x)\,dx & \text{پیوسته} \\ b(r)=\sum_{x=r}^{+\infty}(x-r)\,P(D_L=x) & \text{گسسته} \end{cases}, \quad B(r)=\frac{\mu_D}{Q}\,b(r)$$

متوسط تعداد کمبود در سال ← $B(r)$

$b(r)$ ← متوسط تعداد کمبود در دوره

درصد تقاضایی که با کمبود مواجه می‌شویم $=\frac{B(r)}{\mu_D}=\frac{b(r)}{Q}$

میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل محصولی ۹۰ ماه است و توزیع احتمال تقاضای محصول در مدت زمان تحویل آن به صورت جدول زیر است. متوسط تقاضای سالیانه محصول ۵۰۰ ماه است و مقدار هر بار سفارش آن ثابت و برابر ۵۰ واحد است. قرار است سطح خدمت طوری انتخاب شود که احتمال کمبود در زمان دریافت هر بار سفارش /۲۵ باشد.

الف) موجودی اطمینان محصول را حساب کنید.

ب) به طور متوسط چه مدت طول می‌کشد تا در یکی از دوره‌های سفارش کمبود رخ دهد؟

ج) متوسط تعداد کمبود سالیانه را حساب کنید. د) درصد تقاضایی که با کمبود مواجه می‌شود را حساب کنید.

x	۸۰	۸۵	۹۰	$\overset{۲}{۹۵}$	۱۰۰	۱۰۵
P(X= تقاضا در مدت زمان تحویل)	/۳	/۲	/۰۵	/۲	/۱۵	/۱

$\mu_{D_L}=۹۰$, $\mu_D=۵۰۰$, $Q=۵۰$, $1-P=/۲۵ \Rightarrow P=/۷۵$

ه) تعداد دوره‌های که به طور متوسط یکی از آن‌ها با کمبود مواجه می‌شود

$SS=r-\mu_{D_L} \Rightarrow SS=۹۵-۹۰ \Rightarrow \underline{\underline{SS=۵}}$ الف

$1-P=\frac{N_b}{\frac{\mu_D}{Q}} \Rightarrow /۲۵=\frac{N_b}{\frac{۵۰۰}{۵۰}} \Rightarrow N_b=۲/۵ \Rightarrow T_b=\frac{1}{N_b}=\frac{1}{۲/۵}=۰/۴$ ب

$r=۹۵$

$b(r)=\sum_{x=۹۵}^{۱۰۵}(x-r)P=۵\times/۱۵+۱۰\times/۱=۱/۷۵$, $B(r)=\frac{\mu_D}{Q}b(r)=\frac{۵۰۰}{۵۰}\times۱/۷۵=۱۷/۵$ ج

درصد تقاضاهایی که با کمبود مواجه می‌شوند $=\frac{B(r)}{\mu_D}=\frac{b(r)}{Q}=\frac{۱/۷۵}{۵۰}=۳/۵$٪ د

$\frac{1}{1-p}=\frac{1}{/۲۵}=۴$ ه

مدل احتمالی FOS در حالت تقاضای نرمال

مثل مدل احتمالی ساده FOS $D_L \sim N(\mu_{D_L}, \sigma^2_{D_L})$

در حالتی که در مدت زمان تحویل دارای توزیع نرمال باشد.

$P=P(D_L\le r)=P(Z\le \overset{k_p}{\boxed{\frac{r-\mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}}})$

$\begin{cases} k_{/۹۵}=۱/۶۴۵ \\ k_{/۹}=۱/۲۸ \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} r=\mu_{D_L}+SS \\ \frac{r-\mu_{D_L}}{\sigma_{D_L}}=k_p \Rightarrow r=\mu_{D_L}+k_p\sigma_{D_L} \end{array}\right\} \Rightarrow SS=k_p\sigma_{D_L}$

مدل احتمالی FOS با مدت زمان تحویل احتمالی

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال σ_D / μ_D

L: متغیر تصادفی مدت زمان تحویل σ_L / μ_L

D_L: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل $\sigma_{D_L}=? / \mu_{D_L}=?$

$\mu_{D_L}=E(D_L)=E(E(D_L|L))=\mu_D\times\mu_L$

$\sigma^2_{D_L}=var(D_L)=E(var(D_L|L))+var(E(D_L|L))=\mu_L\sigma_D^2+\sigma_L^2\mu_D^2$

حالت I $\left\{\begin{array}{l}\text{D احتمالی}\\ \text{L قطعی}\end{array}\right.$ $\mu_{D_L}=\mu_D\times L$, $\sigma_{D_L}=\sigma_D\times\sqrt{L}$

حالت II $\left\{\begin{array}{l}\text{D قطعی}\\ \text{L احتمالی}\end{array}\right.$ $\mu_{D_L}=D\mu_L$, $\sigma_{D_L}=D\sigma_L$

مثال: تقاضای سالیانه کالایی به صورت تابع نرمال با میانگین ۸۰۰۰ واحد و انحراف معیار ۱۰۰۰ واحد است. زمان انتظار برای تحویل کالا به صورت ثابت و نیم ماه است. اگر سطح سرویس این کالا ۹۵. باشد، نقطه سفارش مجدد برابر است با:

$P(Z \le ۱٫۶۴۵) = ۰٫۹۵$

$D \sim N(۸۰۰۰, ۱۰۰۰)$

$P = ۰٫۹۵$ $\mu_{DL} = L \times \mu_D = ۸۰۰۰ \times \frac{۱}{۲۴}$

$\sigma_{DL} = \sigma_D \times \sqrt{L} = ۱۰۰۰ \times \sqrt{\frac{۱}{۲۴}}$

$r = \mu_{DL} + k_{۰٫۹۵}\sigma_{DL} = \left(\frac{۸۰۰۰}{۲۴}\right) + (۱٫۶۴۵) \times ۱۰۰۰\sqrt{\frac{۱}{۲۴}} = ۶۶۹$

مثال: محصولی هر سه ماه یکبار سفارش داده می‌شود. مدت تحویل این محصول ۱ ماه است. توزیع تقاضای این محصول در طی مدت t (به ماه) نرمال با میانگین $۱۰۰t$ و انحراف معیار $۱۰\sqrt{t}$ است. اگر سطح خدمت (احتمال نبود کمبود در هر دوره سفارش) این محصول ۹۰٪ باشد، آنگاه حداکثر موقعیت موجودی این محصول چقدر است؟ ($P(X \le ۱٫۲۸) = ۰٫۹$ اگر X دارای توزیع نرمال استاندارد باشد)

$\mu_{D_t} = ۱۰۰t$

$\sigma_{D_t} = ۱۰\sqrt{t}$

$L = \frac{۱}{[illegible]}$ ماه

$P = ۹۰\%$

$T = \frac{۳}{[illegible]}$ ماه

$D_t \sim N(\mu_t = ۱۰۰t, \sigma_D = ۱۰\sqrt{t})$

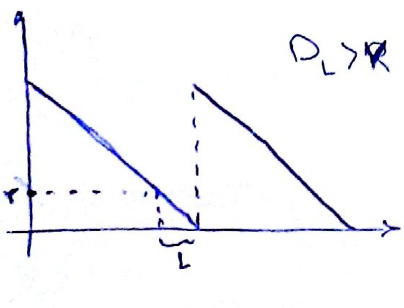
$D_{L+T} = D_{۱+۳} = D_۴ \sim N(\mu_۴ = ۴۰۰, \sigma_۴ = ۲۰)$

$R = \mu_{D_{L+T}} + SS$

$SS = k_p \sigma_{D_{L+T}} \Rightarrow SS = k_{۰٫۹}\sigma_{D_{L+T}}$

$\mu_{D_۴} = ۴۰۰$

مدل احتمالی ساده FOI



فرضیات مدل مانند مدل EOQ با این تفاوت‌ها که:

① تقاضا احتمالی و ساکن است

② کمبود جایز است.

③ خط مشی سفارش‌دهی FOI است.

متغیرها و پارامترهای مدل:

D_{L+T}: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل + زمان یک دوره سفارش

$\mu_{D_{L+T}}$: میانگین تقاضا در مدت زمان تحویل + زمان یک دوره سفارش

if $D_{L+T} \le R \rightarrow$ با کمبود مواجه نمی‌شویم

$\sigma_{D_{L+T}}$: انحراف معیار تقاضا در مدت زمان تحویل + زمان یک دوره سفارش

if $D_{L+T} > R \rightarrow$ با کمبود مواجه می‌شویم

$P = P(D_{L+T} \le R)$

R: سقف موجودی

π: جریمه هر واحد کمبود

T: فاصله بین دو سفارش متوالی

P: سطح خدمت / قابلیت اطمینان

SS: موجودی اطمینان مقداری است که برای پاسخگویی به تغییرات تقاضا در مدت زمان تحویل + زمان یک دوره سفارش

قابلیت پوشش

$1-P = \frac{N_b}{\frac{1}{T}} = TN_b$, $T_b = \frac{1}{N_b}$

$P = F_{D_{L+T}}(R)$ تقاضا پیوسته $F_{D_{L+T}}(R) \geq P$ تقاضا گسسته

$R = \mu_{D_{L+T}} + SS$, $SS = R - \mu_{D_{L+T}}$

$b(R) = \int_R^{+\infty} (X-R) f_{D_{L+T}}(x)dx \;/\; \sum_R^{+\infty} (X-R) f_{D_{L+T}}(X)$

$B(R) = \frac{b(R)}{T}$, درصد تقاضایی که با کمبود مواجه می‌شود $= \frac{B(R)}{\mu_D} = \frac{b(R)}{\mu_D T}$

- مدل احتمالی FOI در حالت تقاضای نرمال

$D_{L+T} \sim N(\mu_{D_{L+T}}, \sigma^2_{D_{L+T}})$

$P = P(D_{L+T} \leq R) = P(Z \leq \frac{R-\mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}}) \Longrightarrow \frac{R-\mu_{D_{L+T}}}{\sigma_{D_{L+T}}} = k_p \Longrightarrow \boxed{R = \mu_{D_{L+T}} + k_p \sigma_{D_{L+T}}}$

$SS = k_p \sigma_{D_{L+T}}$

$SS_{FOS} = k_p \sigma_{D_L}$ $SS_{FOI} = k_p \sigma_{D_{L+T}}$

مدل احتمالی FOI در حالت مدت زمان تحویل احتمالی

D: متغیر تصادفی تقاضا در سال μ_D / σ_D

L: متغیر تصادفی مدت زمان تحویل μ_L / σ_L

D_{L+T}: متغیر تصادفی تقاضا در مدت زمان تحویل + زمان یک دوره سفارش

$\mu_{D_{L+T}} = \mu_D \times \mu_{L+T}$, $\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{\mu^2_D \sigma^2_{L+T} + \mu_{L+T} \sigma^2_D}$

حالت خاص:

I) اگر D قطعی باشد ⟸

$\mu_{D_{L+T}} = D\mu_{L+T}$

$\sigma_{D_{L+T}} = \mu_D \sigma_{L+T}$

II) اگر L قطعی باشد ⟸

$\mu_{D_{L+T}} = (L+T)\mu_D$

$\sigma_{D_{L+T}} = \sqrt{L+T}\,\sigma_D$

به صورتی که هر ۳ ماه یکبار سفارش.

مثال: فرض کنید توزیع تقاضا در طی مدت تحویل نرمال با میانگین ۵۸٫۳ و انحراف استاندارد ۱۳٫۱ . اگر تقاضای سالیانه را ۲۰۰ واحد مقدار هر بار سفارش را ۳۰ واحد و سطح خدمات را ۹۰٪ فرض کنیم مطلوب است نقطه سفارش مجدد و ذخیره احتیاط.

$D_L \sim N(۵۸۳, ۱۳٫۱)$

$D = ۲۰۰$

$Q = ۳۰$

$P = ۹۰\%$

$SS = k_p \sigma_{D_L} = K_{۰/۹}(۱۳٫۱) = ۱٫۲۸ \times ۱۳٫۱ = ۱۶٫۸$

$r = \mu_{D_L} + SS = ۵۸٫۳ + ۱۶٫۸ = ۷۵٫۱$

مثال: مدیر یک فروشگاه اسباب بازی فروشی، تقاضا برای نوعی اسباب بازی از توزیع پواسون با میانگین ۴ عدد در طی زمان تدارک پیروی می‌کند. مدیر اسباب بازی فروشی تمایل دارد سطح خدمت را برای این نوع خاص ۹۰٪ در نظر بگیرد. مطلوب است نقطه سفارش مجدد، ذخیره احتیاطی، متوسط مقدار کمبود و متوسط تعداد اسباب بازی‌هایی که در هر دوره نگهداری می‌شود.

$D_L \sim P(\lambda = ۴)$

$P = ۰/۹$ $\quad F_{D_L}(r) \geq ۰/۹ \Rightarrow$ اولین r که در رابطه صدق کند.

$F_{D_L}(r) = \sum_{x=۰}^{r} \frac{e^{-۴}\, ۴^x}{x!}$

D_L	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
P	۰/۰۱۸	۰/۰۷۳	۰/۱۴۶	۰/۱۹۶	۰/۱۹۵	۰/۱۵۶	۰/۱۰۴	۰/۰۵۹	۰/۰۲۹	۰/۰۱۳	۰/۰۰۵	۰/۰۰۱

$\boxed{r^* = ۷}$

D_L	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
F(x)	۰/۰۱۸	۰/۰۹۱	۰/۲۳۸	۰/۴۳۳	۰/۶۲۸	۰/۷۸۴	۰/۸۸۹	۰/۹۴۸

$SS = r - \mu_{D_L} \Rightarrow SS = ۷ - ۴ = ۳$

متوسط تعداد کمبود $= \sum_{۷}^{۱۱} (x-۷) f_{D_L}(x) = \sum_{۷}^{۱۱} (x-۷) \frac{e^{-۴}\, ۴^x}{x!}$

$\simeq ۰$

متوسط تعداد کالایی که نگهداری می‌شود $= \sum_{x=۰}^{۸} (۷-x) \frac{e^{-۴} \times ۴^x}{x!} \simeq ۳$

مثال: توزیع تقاضای کالایی در طی زمان تدارک توزیع نمایی با میانگین ۱۰ است. نقطه سفارش مجدد و ذخیره احتیاطی برای سفارش دهی این کالا را طوری تعیین کنید که سطح خدمت برای این کالا ۹۹٪ باشد.

$P = ۹۹\%$

$\lambda = \frac{۱}{۱۰}$ $\qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$r = \mu_{D_L} + SS$ $\qquad P = P(D_L \leq r)$

$F_{D_L}(r) = ۱ - e^{-\lambda r} = ۱ - e^{-\frac{۱}{۱۰} r} = ۰/۹۹ \Rightarrow \underline{r = ۴۷} \Rightarrow SS = r - \mu_{D_L} = ۴۷ - ۱۰ = ۳۷$

- ذخیره احتیاطی و نقطه سفارش مجدد در حضور هزینه با فرض آنکه مقدار هر بار سفارش از پیش مشخص باشد.

۱) هزینه کمبود در حالت سفارش تأخیر شده (پس افت)

ذخیره احتیاطی را به گونه‌ای می‌توان تعیین نمود که کمترین هزینه مورد انتظار را ایجاد کند. هدف حداقل کردن مجموع هزینه‌های نگهداری ذخیره احتیاطی و هزینه کمبود است.

$$SS = \int^{+\infty} (r-x) f(x_L)\, dx = r \int^{+\infty} f(x_L)\, dx - \int^{+\infty} x\, f(x_L)\, dx$$

$$\Rightarrow SS = r \times ۱ - \mu_{D_L} = r - \mu_{D_L}$$

$$C(r) = h \cdot SS + \pi \frac{D}{Q} b(r)$$

متوسط هزینه سالیانه سیستم = هزینه سالیانه نگهداری SS + هزینه کمبود سالیانه

با مشتق گرفتن از رابطه بالا نسبت به r داریم:

$P(x_L > r) = \frac{hQ}{\pi D}$

۲) هزینه کمبود در حالت فروش از دست رفته

$$SS = \int_0^r (r-x) f(x_L) dx = \int_0^{+\infty} (r-x) f(x_L) dx - \int_r^{+\infty} (r-x) f(x_L) dx = r\int_0^{+\infty} f(x_L) dx - \int_0^{+\infty} x f(x_L) dx + \int_r^{+\infty} (x-r) f(x_L) dx$$
$$= r - \mu_{D_L} + b(r)$$

$$C(r) = h.SS + \pi \frac{\mu_D}{Q} \int_r^{+\infty} (x-r) f(x_L) dx$$

با مشتق گرفتن از رابطه بالا نسبت به r داریم

$P(x_L > r) = \frac{hQ}{\pi D + hQ}$

در سیستم FOI

پس افت $P(D_{L+T} > R) = \frac{hT}{\hat{\pi}}$

فروش از دست رفته $P(D_{L+T} > R) = \frac{h}{n\hat{\pi} + h}$

مثال: اگر توزیع تقاضای ماهانه برای محصولی، نمایی با میانگین ۱۰۰ است. مدت تحویل ۱ ماه بوده و هزینه کمبود هر واحد ۱۰ تومان است. اگر هزینه نگهداری هر واحد ۵ تومان و مقدار هر بار سفارش برابر ۲۵ واحد باشد. در اینصورت مطلوب است:

الف) سطح موجودی اطمینان بهینه در حالت پس افت

ب) رابطه هزینه کمبود سالانه

ج) با فرض اینکه سود هر واحد ۵ تومان باشد، در اینصورت مطلوب است محاسبه نقطه سفارش مجدد در حالت فروش از دست رفته

الف) $F(r) = \frac{\pi D - HQ}{\pi D} = \frac{۱۰(۱۲۰۰) - ۵(۲۵)}{۱۰(۱۲۰۰)} = ۰٫۹۸۹$

$F(r) = P(X_L \le r) = \int_0^r \frac{1}{۱۰۰} e^{-\frac{1}{۱۰۰}x} dx = ۰٫۹۸۹ \Rightarrow r = ۴۵۰$ واحد

$SS = r - \mu_{D_L} = ۴۵۰ - ۱۰۰ = ۳۵۰$

ب) $\pi \frac{\mu_D}{Q} \bar{b}(r) = ۱۰ \left(\frac{۱۲۰۰}{۲۵}\right) \int_{۴۵۰}^{\infty} (x - ۴۵۰) \frac{1}{۱۰۰} e^{-\frac{1}{۱۰۰}x}$

← متوسط هزینه کمبود سالیانه

سود از دست رفته

$\pi = ۱۰ + ۵ = ۱۵$

مربوط به ج

ج) $F(r) = \frac{\pi D}{\pi D + HQ} = \frac{۱۵(۱۲۰۰)}{۱۵(۱۲۰۰) + ۵(۲۵)} = ۰٫۹۹۳$

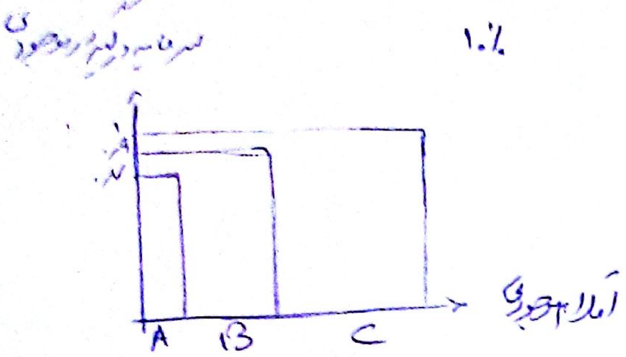
$F(r) = P(X_L \le r) = \int_0^r \frac{1}{۱۰۰} e^{-\frac{1}{۱۰۰}x} dx = ۰٫۹۹۳ \Rightarrow r = ۴۹۶$

$\bar{b}(r) = \int_{۴۹۶}^{\infty} (x - ۴۹۶) \frac{1}{۱۰۰} e^{-\frac{1}{۱۰۰}x} dx = ۰٫۷$ واحد

$SS = r - \mu_{D_L} + \bar{b}(r) = ۴۹۶ - ۱۰۰ + ۰٫۷ = ۳۹۶,۷$

آنالیز ABC

گروه	درصد اقلام موجودی	درصد سرمایه‌گذاری در موجودی (ریالی)
A	حداکثر ۱۰٪	حداقل ۷۰٪
B	۲۰٪	۲۰٪
C	حداقل ۷۰٪	۱۰٪



کدام یک از عبارات زیر صحیح نیست؟

۱، گروه A دارای بیشترین تقاضای سالیانه است. نادرست

۲، گروه B همواره دارای تعداد قلم کالای بیشتری نسبت به A و کمتری نسبت به C هستند. نادرست

۳، گروه C دارای کمترین قیمت واحد محصول هستند. نادرست

۴، گروه A دارای بیشترین تقاضای سالیانه برحسب واحد پولی هستند. درست .

مدل قطعی و پویا (MRP)

فرضیات مدل مانند مدل EOQ با این تفاوت‌ها که:

۱، هزینه نگهداری صرفاً برای واحدهایی حساب می‌شود که از یک دوره به دوره‌های بعد منتقل می‌شوند

۲، سفارش صرفاً در ابتدای دوره قابل دریافت است

۳، کمبود جایز نیست

۴، سفارش یکجا دریافت می‌شود

۵، دوره‌های زمانی با هم برابرند

۶، محدودیت دریافت سفارش در ابتدای هر دوره وجود دارد

۷، قیمت هر واحد موجودی به مقدار سفارش بستگی ندارد.

۸، تقاضا قطعی و پویا است .

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تقاضا	۳۰	۴۰	۷۰	۶۰	۹۰	۵۰	۸۰

روش حل مدل

① روش دسته به دسته (Lot For Lot)

در ابتدای هر دوره به اندازه تقاضای دوره سفارش می‌دهیم

نکته: کل هزینه نگهداری = ۰

هزینه سفارش دهی بالا است .

② روش FOS (Q ثابت و دلخواه)

اگر تقاضا کم‌تر از مقدار ثابت مشخص شده باشد ← مقدار تعیین شده سفارش می‌دهیم ولی اگر بیشتر باشد به اندازه مضربی از مقدار مشخص شده که پاسخگوی تقاضا باشد سفارش داده می‌شود.

مثال:

مقدار سفارش در هر بار ثابت و به اندازه ۱۵ واحد و مدت تدارک برابر صفر است.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تقاضا	-	۴۰	۱۰	۲۵	۳۵	-	۱۰	۱۰	۳۵

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
برنامه سفارش	-	۴۵	۱۵	۱۵	۴۵	—	—	۱۵	۳۰
موجودی در دست در انتهای دوره	-	۵	۱۰	۰	۱۰	۱۰	۰	۵	۰

③ روش FOS (Q ثابت و $Q=\sqrt{\frac{2DA}{h}}$)

مثال: معمولاً زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که مقدار تقاضا در دوره‌های زمانی مختلف به یکدیگر نزدیک باشند

هزینه نگهداری هر واحد محصول انبار برای یک دوره برابر ۱٫۵ واحد پولی است و هزینه هر بار سفارش ۸۰ واحد پولی است.

$$Q=\sqrt{\frac{2DA}{h}}=\sqrt{\frac{2\times 25\times 80}{1.5}}=\sqrt{\frac{4000}{1.5}}\simeq 52$$

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تقاضا	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵	۲۵

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
سفارش	۵۲	-	۵۲	-	۵۲	-	۵۲	-	۵۲
موجودی در دست انتهای دوره	۲۷	۲	۲۹	۴	۳۱	۶	۳۳	۸	۳۵

④ روش FOI (T ثابت و دلخواه)

مقدار سفارش از مجموع تقاضاها برای T دوره به دست می‌آید.

مثال: اگر مهلت تحویل ۳ ماه و با هر سفارش احتیاجات دو دوره پوشش داده شود مقدار هر بار سفارش را تعیین کنید.

هر دوره ۱ ماه است.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تقاضا				۲۵	۳۵	۵	۱۰	۱۰	۲۵	۳۵
سفارش	۶۰	-	۱۵	-	۳۵	-	۳۵			

⑤ روش FOI (T ثابت و $T=\sqrt{\frac{2A}{nD}}$)

فاصله بین سفارشات طبق منطق باید به اندازه تعداد صحیحی از دوره‌های زمانی باشد در صورتیکه دوره اقتصادی محاسبه شده یک عدد صحیح نباشد به نزدیک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر گرد می‌شود.

مثال: هزینه خرید هر واحد از محصولی برابر ۵۰ تومان. هزینه سفارش دهی آن ۱۰۰ تومان و درصد هزینه نگهداری آن در هر دوره برابر ۲٪ است. تقاضاهای این محصول برای ۱۰ ماه آینده در جدول زیر داده شده است مقدار هر بار سفارش را با استفاده از روش دوره اقتصادی تعیین کنید.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
تقاضا	۱۰	۳	۳۰	۱۰۰	۷	۱۵	۸۰	۵۰	۱۵	۰
سفارش	۴۳	-	-	۱۲۲	-	-	۱۴۵			۰

$$\bar{D}=\frac{\sum D}{۱۰}=۳۱ \Rightarrow T=\sqrt{\frac{۲A}{nD}}=\sqrt{\frac{۲\times۱۰۰}{۰,۰۲\times۵۰\times۳۱}}=۲,۵۴ \Rightarrow T=۳$$

مثال: مدت زمان تحویل صفر، دو ماه یکبار سفارش ارسال می‌شود. حداکثر سطح مجاز در سیستم ۱۴۰ واحد برنامه سفارش را مشخص کنید.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تقاضا	۶۵	۶۰	۳۵	۵۰	۷۰	۶۰	۶۰	۵۰	۵۵

روش حداقل هزینه واحد LUC (Least unite cost)

هدف: می‌نیمم کردن مجموع هزینه‌های نگهداری و سفارش دهی واحد محصول

مقدار هر بار سفارش باید مساوی مصرف یک یا چند دوره کامل باشد.

$$uc(j)=\frac{A+h\sum_{i=1}^{j}(i-1)D_j}{\sum_{i=1}^{j}D_i}$$

$$\left.\begin{array}{l} uc(j)<uc(j+1) \\ uc(j)<uc(j-1) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$ شرط توقف

هزینه هر بار سفارش دهی برای یک دوره = (هزینه نگهداری + هزینه سفارش دهی) / مقدار سفارش

مثال: اگر هزینه سفارش دهی ۱۰۰ تومان و هزینه نگهداری هر واحد از یک دوره به دوره بعد ۲ تومان باشد برنامه سفارش دهی را با استفاده از روش حداقل هزینه واحد بدست آورید.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
تقاضا	۳۰	۴۰	۷۰	۶۰	۹۰	۵۰	۸۰
سفارش	۷۰	-	۷۰	۶۰	۹۰	۱۳۰	

$uc(1)=\frac{۱۰۰}{۳۰}=۳,۳$

$uc(2)=\frac{۱۰۰+۲(۴۰)}{۳۰+۴۰}=۲,۶$, $uc(3)=\frac{۱۰۰+۲\times۲\times۷۰+۲(۴۰)}{۳۰+۴۰+۷۰}=۳,۲۵$

$uc(2)<uc(1)$, $uc(2)<uc(3) \Rightarrow$ توقف $\Rightarrow$ ۳۰+۴۰=۷۰ واحد سفارش در ابتدای دوره اول

$$\left.\begin{array}{l} uc(1)=\frac{۱۰۰}{۷۰}=۱,۴۲۸ \\ uc(2)=\frac{۱۰۰+۲(۶۰)}{۷۰+۶۰}=۱,۶۹ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ توقف

۷۰ واحد سفارش در ابتدای دوره سوم

$$\left.\begin{array}{l} uc(1)=\frac{۱۰۰}{۶۰}=۱,۶۶ \\ uc(2)=\frac{۱۰۰+۲(۹۰)}{۶۰+۹۰}=۱,۸۶ \end{array}\right\} \Rightarrow$$ توقف

$$\left\{\begin{array}{l} uc(1)=\frac{۱۰۰}{۹۰}=۱,۱ \\ uc(2)=\frac{۱۰۰+۲(۵۰)}{۹۰+۵۰}=۱,۴۲ \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} uc(1)=\frac{۱۰۰}{۵۰}=۲ \\ uc(2)=\frac{۱۰۰+۲(۸۰)}{۵۰+۸۰}=۲ \end{array}\right.$$

روش حداقل هزینه کل Least Total Cost = LTC

در این روش تعداد دوره‌ای انتخاب می‌شود که به ازای آن هزینه‌های نگهداری و سفارش دهی با هم برابر شوند.

البته لازم به توضیح است در حالت گسسته بودن تقاضا هزینه نگهداری و سفارش دهی معمولاً با هم برابر نمی‌شوند و می‌بایست فاصله آنها را حداقل کرد

هزینه نگهداری	هزینه سفارش دهی	تعداد دوره J
۰	A	۱
hD_2	A	۲
$h(D_2+2D_3)$	A	۳
⋮	⋮	⋮
$h\sum_{i=1}^{J}(i-1)D_i$	A	J

مثال: با استفاده از روش حداقل هزینه کل برنامه سفارش دهی را بدست آورید.

هزینه سفارش دهی ۲۰۰ تومان

هزینه نگهداری هر واحد کالا از یک دوره به دوره بعد ۲ تومان است

۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	دوره
۰	۵۵	۳۰	۰	۳۰	۴۰	۱۰	۰	۴۰	۳۰	تقاضا

هزینه نگهداری	هزینه سفارش دهی	مقدار سفارش	دوره
۰	۲۰۰	۳۰	۱
۴۰(۲)=۸۰	۲۰۰	۷۰	۱,۲
(۴۰+۰)۲=۸۰	۲۰۰	۷۰	۱,۲,۳
(۵۰+۱۰+۱۰)۲=۱۴۰ ✓	۲۰۰	۸۰	۱,۲,۳,۴
(۹۰+۵۰+۵۰+۴۰)۲=۴۶۰	۲۰۰	۱۴۰	۱,۲,۳,۴,۵

هزینه نگهداری	هزینه سفارش دهی	مقدار سفارش	دوره
۰	۲۰۰	۴۰	۵
۳۰(۲)=۶۰	۲۰۰	۷۰	۵,۶
(۳۰+۰)۲=۶۰	۲۰۰	۷۰	۵,۶,۷
(۶۰+۳۰+۳۰)۲=۲۴۰ ✓	۲۰۰	۱۰۰	۵,۶,۷,۸
(۱۱۵+۸۵+۸۵+۵۵)۲=۶۸۰	۲۰۰	۱۵۵	۵,۶,۷,۸,۹

- پیش بینی

x_t: مقدار تقاضای واقعی سال t ام

$\hat{x}_t$: پیش بینی تقاضای سال t ام

① روش معدل یا میانگین ساده

$$\hat{x}_{t+1}=\hat{x}_{t+L}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_t}{t}$$

این روش برای داده های که دارای روند مستمر (صعودی یا نزولی) مناسب نیست.

مثلاً برای داده های که نسبت به یک میانگین دارای واریانس یا نوسان مستمر مناسب است.

② روش معدل یا میانگین متحرک ساده

در این روش صرفاً N داده آخر با هم جمع شده و بر N تقسیم می شود. در صورتیکه یک داده واقعی اضافه شود، آخرین داده از محاسبات حذف می شود.

$$\hat{x}_{t+1}=\hat{x}_{t+L}=\frac{x_t+x_{t-1}+\dots+x_{t-N+1}}{N}$$

③ روش معدل متحرک تصحیح شده

$$\hat{x}_{t+1}=\alpha_t x_t+\alpha_{t-1}x_{t-1}+\dots+\alpha_{t-N+1}x_{t-N+1}$$

$$\sum_{i=t-N+1}^{t}\alpha_i=1 \qquad \left.\begin{array}{l}\alpha_i:\text{وزن دوره i ام}\\ \alpha_t\geq\alpha_{t-1}\geq\dots\geq\alpha_{t-N+1}\end{array}\right\}$$

④ رگرسیون خطی ساده

$$\hat{x}_t=a+bt$$

$$\begin{cases}\hat{a}=\bar{x}\\ \hat{b}=\dfrac{\sum t_i x_i}{\sum t_i^2}\end{cases}$$

⑤ روش هموارسازی نمایی ساده

درصدی از اختلاف بین مقدار پیش بینی و واقعی دوره قبل + تخمین قدیم = تخمین جدید

$$\hat{x}_{t+1}=\hat{x}_t+\alpha(x_t-\hat{x}_t)\longrightarrow\hat{x}_{t+1}=\alpha x_t+(1-\alpha)\underbrace{\hat{x}_t}_{\alpha x_{t-1}+(1-\alpha)\hat{x}_{t-1}}$$

ضریب هموارسازی $0\leq\alpha\leq1$

$$\hat{x}_{t+1}=\alpha x_t+\alpha(1-\alpha)x_{t-1}+\alpha(1-\alpha)^2x_{t-2}+\dots+\alpha(1-\alpha)^{t-1}x_1+(1-\alpha)^t\hat{x}_1$$

نکته: در این روش مقدار $\hat{x}_1$ (معمولاً اولین پیش بینی) بر اساس روش دیگری (معمولاً معدل متحرک ساده) با در نظر گرفتن N داده قبل از آن انجام می شود. سپس با محاسبه $\alpha=\frac{2}{N+1}$ هموارسازی تا سال t+1 (x_t آخرین داده واقعی است) ادامه می یابد.

این روش قادر است صرفاً تا یک دوره بعد از آخرین داده واقعی را پیش بینی کند.

نکته: هرچه α بزرگتر باشد به داده های نزدیک اهمیت بیشتری داده می شود.

مثال: مقدار واقعی تقاضا برای ۴ ماه گذشته بصورت جدول زیر است. اگر مقدار پیش بینی ماه ۲۲ از روش معدل متحرک با ۳ دوره قبل برابر با ۳۲ باشد مقدار پیش بینی ماه ۲۴ براساس روش هموارسازی نمایی ساده چقدر است؟

۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	ماه
۴۳	۴۰	۳۳	۲۵	تقاضای واقعی

$\hat{X}_{۲۲}=۳۲$

$N=۳ \Rightarrow \alpha=\frac{۲}{N+1}=۰/۵$

$\hat{X}_{۲۴}=\alpha X_{۲۳}+\alpha(1-\alpha)X_{۲۲}+(1-\alpha)^{۲}\hat{X}_{۲۲}$

$=(۰/۵)(۴۳)+(۰/۵)^{۲}(۴۰)+(۰/۵)^{۲}(۳۲)=۳۹$

تقاضای سالیانه کالایی ۲۰۰۰ تن، هزینه هر بار سفارش دهی ۲۰۰۰ تومان، قیمت هر واحد کالا ۱۰۰ تومان، هزینه نگهداری هر تن کالا در ماه ۰/۵ تومان، هزینه بیمه و آتش سوزی ۲٪ از قیمت کالا هست. کل هزینه سفارش دهی را در حالت اقتصادی بدست آورید.

$h_1=۰/۵\ \frac{\text{تومان}}{\text{تن ماه}} \Rightarrow h_1=۶\ \frac{\text{تومان}}{\text{تن سال}}$

$h=h_1+ic=۶+۰/۰۲\times۱۰۰=۸$

کل هزینه سفارش دهی $=\frac{\sqrt{۲DAh}}{۲}=\frac{\sqrt{۲\times۲۰۰۰\times۲۰۰۰\times۸}}{۲}=۴۰۰۰$

تقاضای سالیانه کالایی ۲۰۰۰ واحد، هزینه هر بار سفارش دهی ۲۰۰ تومان، هزینه نگهداری هر واحد کالا در سال ۲۰ تومان، مدت زمان تحویل ۵ روز و سال کاری ۲۵۰ روز در سال در نظر گرفته شده است؟

الف) مقدار سفارش اقتصادی چقدر است؟

ب) اگر موجودی دیگری در انبار نباشد چند روز طول می کشد تا موجودی انبار به صفر برسد؟

$Q^*=\sqrt{\frac{۲DA}{h}}=\sqrt{\frac{۲\times۲۰۰۰\times۲۰۰}{۲۰}}=۲۰۰$

$T=\frac{Q^*}{D}=\frac{۲۰۰}{۲۰۰۰}=۰/۱$ سال $=۰/۱\times۲۵۰=۲۵$ روز.

در یک سیستم موجودی، تقاضا برای یک ماده اولیه ثابت و یکنواخت فرض شده اندازه سفارش اقتصادی ۱۴۸kg بوده است اخیراً تصمیم گرفته شده که ماده مذکور در بسته های ۱۰۰kg کیلویی تهیه و تحویل می شود لذا هر سفارش می تواند مضربی از ۱۰۰kg باشد در اینصورت [redacted] مقدار سفارش اقتصادی چند کیلوگرم است؟

$Q=۱۰۰ \Rightarrow \frac{k(Q)}{k(Q^*)}=\frac{1}{۲}\left(\frac{۱۴۵}{۱۰۰}+\frac{۱۰۰}{۱۴۵}\right)=۱/۰۷$

$Q=۲۰۰ \Rightarrow \frac{k(Q)}{k(Q^*)}=\frac{1}{۲}\left(\frac{۱۴۸}{۲۰۰}+\frac{۲۰۰}{۱۴۸}\right)=۱/۰۵۳$

$\Rightarrow Q^*=۲۰۰$

تقاضای سالیانه کالایی ۱۶۰۰۰ کیلو در سال است و کمبود موجودی ها مجاز نیست. مقدار بهینه سفارش ۴۰۰۰ کیلو و مدت زمان تحویل ۶ ماه است. نقطه سفارش برحسب موجودی در دست چقدر است؟

$r_h^*=DL-mQ^*=۱۶۰۰۰\times\frac{1}{۲}-۲\times۴۰۰۰$

$=۸۰۰۰-۸۰۰۰=۰$

$m=\left[\frac{L}{T}\right]=\left[\frac{۱/۲}{۱/۴}\right]=۲$

$T=\frac{Q}{D}=\frac{۴۰۰۰}{۱۶۰۰۰}=۱/۴$

در یک سیستم موجودی ... نرخ تقاضا ... اگر کمبود مجاز نباشد میزان سفارش اقتصادی کالایی ۲۸۱۴٫۲ ... در صورتی که ... سفارش ... برابر ۶۳۴۶٫۸۵ تن محاسبه شده است. چنانچه کمبود مجاز باشد ... هزینه کمبود واحد کالا ... محاسبه شود میزان سفارش اقتصادی ۳۴۷۶٫۸ تن می‌شود. ... حداکثر موجودی و نقطه سفارش مجدد را محاسبه کنید.

$Q^* = \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}}\, Q_w \Rightarrow ۶۳۴۶٫۸۵ = \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} \times ۳۴۷۶٫۸ \Rightarrow \sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} = ۱٫۸۳$

$b^* = Q^* - I_{max} = Q_w\left(\sqrt{\frac{\hat{\pi}+h}{\hat{\pi}}} - \sqrt{\frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}+h}}\right) = ۳۴۷۶٫۸ - $ [illegible]

$r^* = r^*_w - b^* = ۵۹۲$[illegible]$٫۲$

مقدار تقاضای سالیانه کالایی ۱۰۰۰۰ عدد است. اگر هزینه هر بار سفارش ۲۰۰ تومان و هزینه نگهداری سالیانه هر واحد کالا از جدول زیر تبعیت کند مقدار سفارش اقتصادی چقدر است؟

هزینه نگهداری هر واحد کالا	مقدار سفارش
۲۰	۱–۳۰۰
۱۸	۳۰۱–∞

هزینه کل $= CD + A\frac{D}{Q} + h\frac{Q}{2}$

$Q = \sqrt{\frac{2DA}{h}} = ۴۲۲$

$Q = \sqrt{\frac{۲×۱۰۰۰۰×۲۰۰}{۱۸}} = ۴۷۲$

محصولی در انبار ... Q ... خریداری شده است و ... نرخ تقاضای سالیانه ۸۰۰۰ واحد و ثابت بوده، هزینه ثابت هر بار سفارش ۸۰ تومان، هزینه هر واحد محصول ۹ تومان، نرخ هزینه نگهداری موجودی در سال ۲۰٪ ... هیچ کمبودی مجاز نیست. هزینه اجاره برای ذخیره موجودی که براساس بیشینه موجودی تعیین می‌شود در نرخ هزینه نگهداری ... منظور نشده ... نرخ زیر است: برای سقف موجودی تا ۷۰۰ واحد ۲ تومان برای هر واحد است و برای هر واحد محصول اضافه بر ۷۰۰ واحد ۲٫۲ تومان برای هر واحد محصول در سال هزینه اجاره برای فضای نگهداری محاسبه می‌شود. اندازه انباشته اقتصادی چقدر است؟

	h_x
$Q \le ۷۰۰$	۲
$Q > ۷۰۰$	۲٫۲

هزینه کل $= A\frac{D}{Q} + CD + (h + h_x)\frac{Q}{2}$

$Q = \sqrt{\frac{2DA}{IC + h_x}} = \sqrt{\frac{۲×۸۰۰۰×۸۰}{۱٫۸ + ۲}} = ۳۷۶٫۷ \cong ۳۷۷$